

Lösningsskisser för TATA41 220607

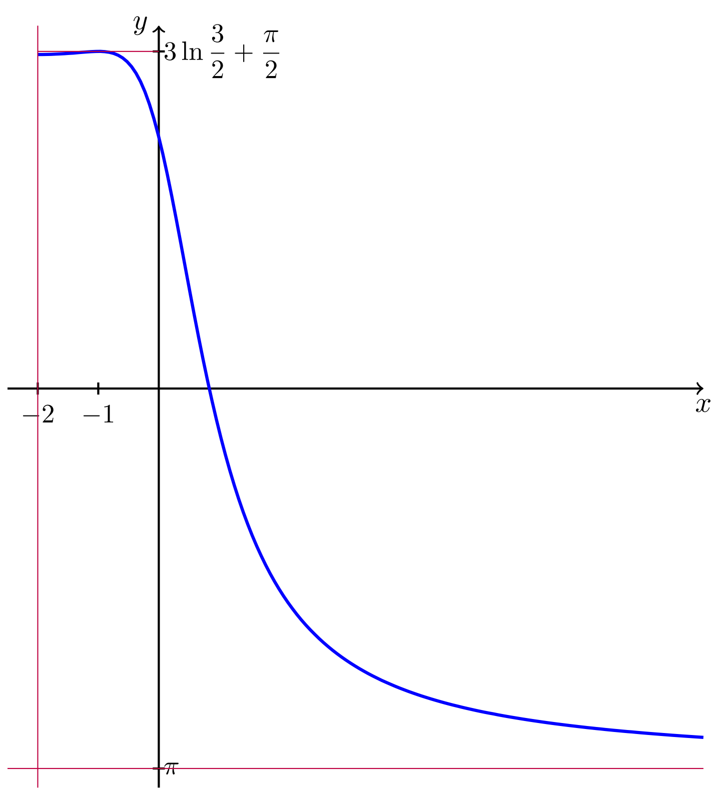
1) f är definierad för $x \geq -2$ enligt förutsättning.

Standardräkningar (Gör dessa!) ger $f'(x) = -2\dfrac{(x+2)(x+1)}{(x^2+2)(x^2+1)}$. Teckentabell:

x	-2		-1	
-2		$-$		$-$
$x+2$	0	$+$		$+$
$x+1$		$-$	0	$+$
x^2+2		$+$		$+$
x^2+1		$+$		$+$
$f'(x)$	ej def.	$+$	0	$-$
$f(x)$	lok. min.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

Observera att f ej är deriverbar i -2 då f ej är definierad för $x < -2$.

Vi ser att $f(x) = 3\ln\dfrac{1+2/x^2}{1+1/x^2} - 2\arctan x \to -\pi\,,\ x \to \infty$. Vidare är $f(-2) = 3\ln\dfrac{6}{5} + 2\arctan 2$ och $f(-1) = 3\ln\dfrac{3}{2} + \dfrac{\pi}{2}$. Detta ger grafen



Svar: Graf enligt ovan. Enligt denna är $V_f = \left]-\pi, 3\ln\dfrac{3}{2} + \dfrac{\pi}{2}\right]$.

2a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x-3x^2+4x^3}{3^x-4x^2+5x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4-\frac{3}{x}+\frac{2^x}{x^3}}{5-\frac{4}{x}+\frac{3^x}{x^3}}=\frac{4}{5}.$

2b) Konjugatförlängning ger $\displaystyle\frac{\sqrt{1+2x^2}-\sqrt{1-3x^2}}{x\ln(1+x)}=\frac{1+2x^2-(1-3x^2)}{\left(\sqrt{1+2x^2}+\sqrt{1-3x^2}\right)x\ln(1+x)}$

$$=\frac{5}{\left(\sqrt{1+2x^2}+\sqrt{1-3x^2}\right)\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}}\to\frac{5}{(\sqrt{1}+\sqrt{1})\cdot 1}=\frac{5}{2},\ x\to 0 \text{ (standardgränsvärde).}$$

2c) Bytet $t=x-1$ ger $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\ln(2-x)}{\sin\pi x}=\lim_{t\to0}\frac{\ln(1-t)}{-\sin\pi t}=\lim_{t\to0}\frac{\ln(1-t)}{-t}\cdot\frac{1}{\frac{\sin\pi t}{\pi t}\cdot\pi}=1\cdot\frac{1}{1\cdot\pi}=\frac{1}{\pi}$ enligt ett standardgränsvärde.

Svar: (a) $\frac{4}{5}$ (b) $\frac{5}{2}$ (c) $\frac{1}{\pi}$.

3a) Partialbråksuppdelning ger (C är en godtycklig konstant)

$$\int\frac{dx}{1-2x^2}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-\sqrt{2}x}+\frac{1}{1+\sqrt{2}x}\right)dx=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}x}{1-\sqrt{2}x}\right|+C.$$

3b) Partialintegration av en etta ger (C är en godtycklig konstant)

$$\int\arctan 2x\,dx=x\arctan 2x-\int\frac{2x}{1+4x^2}\,dx=x\arctan 2x-\frac{1}{4}\ln(1+4x^2)+C.$$

3c) Bytet $t=\cos x$, $dt=-\sin x\,dx$ följt av en partialintegration ger (C är en godtycklig konstant)

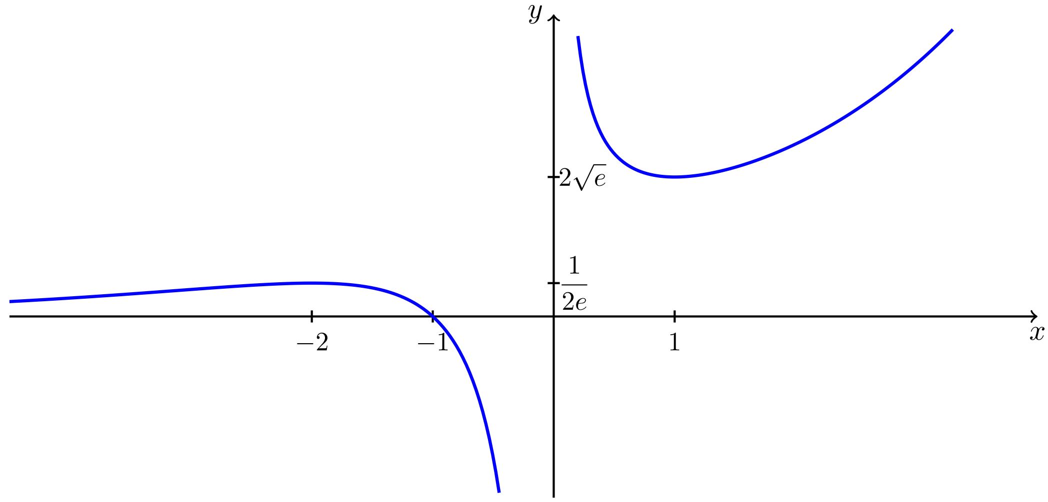
$$\int e^{\cos x}\sin 2x\,dx=2\int e^{\cos x}\cos x\sin x\,dx=-2\int te^t\,dt=-2te^t+2\int e^t\,dt=2e^{\cos x}(1-\cos x)+C.$$

Svar: (a) $\displaystyle\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}x}{1-\sqrt{2}x}\right|+C$ (b) $x\arctan 2x-\frac{1}{4}\ln(1+4x^2)+C$ (c) $2e^{\cos x}(1-\cos x)+C$.

4) Sätt $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{x/2}$. f är definierad för $x\neq 0$. Standardräkningar (Gör dessa!) ger $f'(x)=\dfrac{(x+2)(x-1)}{2x^2}e^{x/2}$. Teckentabell:

x		-2		0		1	
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$2x^2$	$+$		$+$	0	$+$		$+$
$e^{x/2}$	$+$		$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	ej def.	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	ej def.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Nu gäller $f(x)\to\pm\infty$, $x\to 0^{\pm}$, $f(x)\to 0$, $x\to-\infty$ och $f(x)\to\infty$, $x\to\infty$. Vidare är $f(-2)=\frac{1}{2e}$ och $f(1)=2\sqrt{e}$. Detta ger grafen



Svar: Lösning saknas om $\frac{1}{2e} < k < 2\sqrt{e}$. En lösning om $k \leq 0$, $k = \frac{1}{2e}$ eller $k = 2\sqrt{e}$. Två lösningar om $0 < k < \frac{1}{2e}$ eller $k > 2\sqrt{e}$.

5a) Se kursboken.

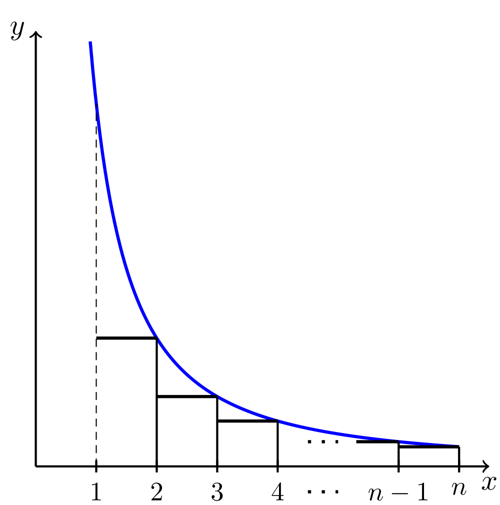
5b) $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{e^{(x+h)^2} - e^{x^2}}{h} = \frac{e^{2xh+h^2}-1}{h} e^{x^2} = \frac{e^{2xh+h^2}-1}{2xh+h^2}(2x+h)e^{x^2} \to 2xe^{x^2},\ h \to 0$ enligt ett standardgränsvärde.

5c) Sätt $f(x) = \arctan x$. Då är $\frac{\arctan\left(\frac{1}{2}+h\right) - \arctan\frac{1}{2}}{h} = \frac{f\left(\frac{1}{2}+h\right) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{h}$ som har ett gränsvärde då $h \to 0$ ty vi vet att $f(x) = \arctan x$ är deriverbar. Derivatans definition ger nu

$$\lim_{h\to 0} \frac{\arctan\left(\frac{1}{2}+h\right) - \arctan\frac{1}{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f\left(\frac{1}{2}+h\right) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{h} = f'\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{5}.$$

Svar: (a) Se kursboken (b) $2xe^{x^2}$ (c) $\frac{4}{5}$.

6) Låt $x > 0$ och sätt $f(x) = \frac{x+1}{x^3+x} = \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{x^3+x}$. f är en summa av strängt avtagande funktioner på $]0,\infty[$ så f är strängt avtagande på $]0,\infty[$ (kan också visas genom att studera $f'(x)$). Då $f(x) \to 0\,,\ x \to \infty$ och $f(x) \to \infty\,,\ x \to 0^+$ kan vi rita f:s graf (Gör detta!!!):



Figuren ger att $\dfrac{2+1}{2^3+2}\cdot 1+\dfrac{3+1}{3^3+3}\cdot 1+\dfrac{4+1}{4^3+4}+\cdots+\dfrac{n+1}{n^3+n}\cdot 1=\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{k+1}{k^3+k}$ är en undersumma till $\int\limits_1^n \dfrac{x+1}{x^3+x}\,dx$. Detta samt en partialbråksuppdelning ger

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k^3+k}=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k^3+k}<1+\int_1^n\frac{x+1}{x^3+x}\,dx=1+\int_1^n\left(\frac{1}{x}-\frac{x-1}{x^2+1}\right)dx$$
$$=1+\left[\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\arctan x\right]_1^n=1+\frac{1}{2}\ln\frac{n^2}{n^2+1}+\arctan n+\frac{1}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4}.$$

Nu är $\ln\dfrac{n^2}{n^2+1}<\ln 1=0$, och $\arctan n<\dfrac{\pi}{2}$ för alla n så $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k+1}{k^3+k}<1+\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\ln 2$. Vidare är $\ln 2<1$ (ty $2<e$) och $\dfrac{\pi}{4}<1$ (ty $\pi<4$) så det följer att $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k+1}{k^3+k}<1+1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$, vilket skulle visas.

Svar: Se ovan.

7) Gör bytet $x=\sin y$, $0\le y\le\dfrac{\pi}{2}$ och sedan $t=\tan\dfrac{y}{2}$. För andra bytet är $\dfrac{dt}{dy}=\dfrac{1}{2}\left(1+\tan^2\dfrac{y}{2}\right)$ $=\dfrac{1+t^2}{2}$ så $dy=\dfrac{2}{1+t^2}dt$. Dessutom är $\cos y=\dfrac{\cos^2\frac{y}{2}-\sin^2\frac{y}{2}}{\cos^2\frac{y}{2}+\sin^2\frac{y}{2}}=\dfrac{1-\tan^2\frac{y}{2}}{1+\tan^2\frac{y}{2}}=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.
Detta, samt en partialbråksuppdelning, ger ($I=$ sökt integral)

$$I=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos y}{2+\cos y}dy=\int_0^1\frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2\,dt}{1+t^2}=\int_0^1\frac{2(1-t^2)}{(3+t^2)(1+t^2)}dt=\int_0^1\left(\frac{2}{1+t^2}-\frac{4}{3+t^2}\right)dt$$
$$=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{3}\int_0^1\frac{dt}{1+\frac{t^2}{3}}=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{3}\left[\sqrt{3}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}}\right]_0^1=\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}=\frac{9-4\sqrt{3}}{18}\pi.$$

Svar: $\dfrac{9-4\sqrt{3}}{18}\pi$.