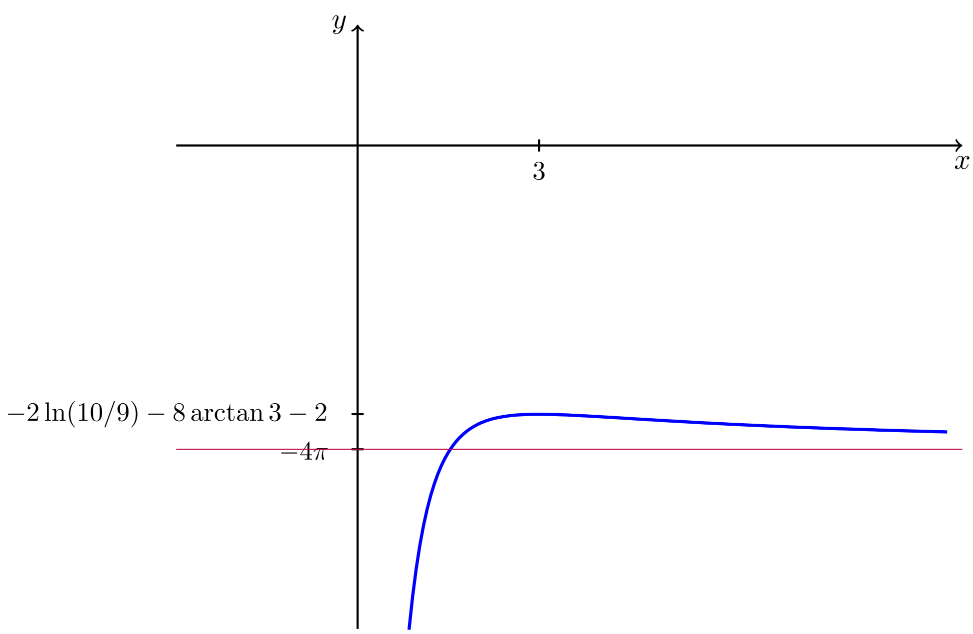
Lösningsskisser för TATA41 220823

1) f är definierad för $x > 0$. Standardräkningar (Gör dessa!) ger $f'(x) = \dfrac{(6-2x)(x+1)}{x^2(1+x^2)}$.
Teckentabell:

x	0		3	
$6-2x$		$+$	0	$-$
$x+1$		$+$		$+$
x^2	0	$+$		$+$
$1+x^2$		$+$		$+$
$f'(x)$	ej def.	$+$	0	$-$
$f(x)$	ej def.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

Nu gäller $f(x) \to -\infty\,,\ x \to 0^+$ och $f(x) = -2\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) - 8\arctan x - \dfrac{6}{x} \to -4\pi\,,\ x \to \infty$.
Vidare är $f(3) = -2\ln(10/9) - 8\arctan 3 - 2 < 0$. Detta ger grafen



Svar: Graf enligt ovan. Linjen $x = 0$ är lodrät asymptot och linjen $y = -4\pi$ är en vågrät asymptot då $x \to \infty$. f har en lokal maximipunkt i $x = 3$ (med det lokala maximivärdet $f(3) = -2\ln(10/9) - 8\arctan 3 - 2$).

2a) Polynomdivision följt av partialbråksuppdelning ger (C är en godtycklig konstant)

$$\int \frac{x^2-2}{x^2-1}\,dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2-1}\right) dx = x - \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) dx = x - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$$

2b) Variabelbytet $t = x^2$, $dt = 2x\,dx$ samt en partialintegration ger (C är en godtycklig konstant)

$$\int x^3 \cos x^2\,dx = \int \frac{t}{2}\cos t\,dt = \frac{t}{2}\sin t - \frac{1}{2}\int \sin t\,dt = \frac{t}{2}\sin t + \frac{1}{2}\cos t + C$$
$$= \frac{x^2}{2}\sin x^2 + \frac{1}{2}\cos x^2 + C.$$

2c) Kvadratkomplettering och en standardprimitiv ger (C är en godtycklig konstant)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+3)^2-8}} = \ln\left|x+3+\sqrt{x^2+6x+1}\right| + C.$$

Svar: (a) $x - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$ (b) $\frac{x^2}{2}\sin x^2 + \frac{1}{2}\cos x^2 + C$ (c) $\ln\left|x+3+\sqrt{x^2+6x+1}\right| + C$.

3a) $x - \sqrt{x^2-7x} = \dfrac{x^2-(x^2-7x)}{x+\sqrt{x^2-7x}} = \dfrac{7}{1+\sqrt{1-\frac{7}{x}}} \to \dfrac{7}{1+\sqrt{1}} = \dfrac{7}{2}$, $x \to \infty$, där vi förlängt med konjugatkvantiteten i första likheten och utnyttjat att vi kan anta att $x > 0$ i andra likheten.

3b) $\dfrac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{\sin 3x}} = \dfrac{1}{\cos\sqrt{x}} \cdot \dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{\frac{\sin 3x}{3x}}\cdot\sqrt{3}} \to \dfrac{1}{1}\cdot 1 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $x \to 0^+$ enligt ett standardgränsvärde.

3c) Sätt $t = e^x$. Faktorisering av täljare och nämnare ger då

$$\lim_{x\to\ln 2}\frac{e^{2x}+e^x-6}{5e^x-2e^{2x}-2} = \lim_{t\to 2}\frac{t^2+t-6}{5t-2t^2-2} = \lim_{t\to 2}\frac{(t-2)(t+3)}{(t-2)(1-2t)} = \lim_{t\to 2}\frac{t+3}{1-2t} = \frac{2+3}{1-2\cdot 2} = -\frac{5}{3}.$$

Svar: (a) $\frac{7}{2}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (c) $-\frac{5}{3}$.

4a) Variabelbytet $t = \ln x$, $dt = dx/x$ ger att

$$\int_a^1 \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_{\ln a}^0 t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{\ln a}^0 = -\frac{(\ln a)^2}{2} \to -\infty\,,\ a \to 0^+,$$

vilket visar att $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x}\,dx$ är divergent.

4b) En partialintegration ger

$$\int_a^1 \ln x\,dx = [x\ln x]_a^1 - \int_a^1 x\cdot\frac{1}{x}\,dx = -a\ln a - (1-a) \to -1\,,\ a \to 0^+,$$

enligt standardgränsvärdet $x\ln x \to 0\,,\ x \to 0^+$, så $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$ är konvergent med värdet -1.

4c) Låt $a > 0$ och gör variabelbytet $t = -x\,,\ dt = -dx$. Då fås

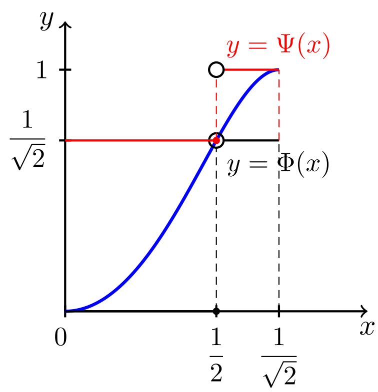
$$\int_{-1}^{0} \ln(x^2)\,dx = \lim_{a\to 0^+} \int_{-1}^{-a} \ln\left((-x)^2\right)\,dx = \lim_{a\to 0^+} \int_{1}^{a} \ln t^2\,(-dt) = \lim_{a\to 0^+} 2\int_{a}^{1} \ln t\,dt = 2\int_{0}^{1} \ln t\,dt = -2,$$

enligt 4b). Denna integral är alltså också konvergent.

Svar: (a) Divergent (b) Konvergent med värdet -1 (c) Konvergent med värdet -2.

5abc) Se kursboken.

6) x^2 är strängt växande på $0 \le x \le 1/\sqrt{2}$ och därmed är $f(x) := \sin(\pi x^2)$ också strängt växande på samma intervall (ty sin är strängt växande på $[0, \pi/2]$). Då $f(1/2) = 1/\sqrt{2}$ följer att om vi sätter $\Phi(x) = 0$ för $0 \le x \le 1/2$ och $\Phi(x) = 1/\sqrt{2}$ för $1/2 < x \le 1/\sqrt{2}$ så blir Φ en undertrappa till f på $0 \le x \le 1/\sqrt{2}$. På samma sätt blir $\Psi(x) = 1/\sqrt{2}$ för $0 \le x \le 1/2$ och $\Psi(x) = 1$ för $1/2 < x \le 1/\sqrt{2}$ en övertrappa till f på $0 \le x \le 1/\sqrt{2}$.



Integralen av Φ och Ψ blir därmed en under- resp. översumma till $\int_0^{1/\sqrt{2}} \sin(\pi x^2)\,dx$ vilket ger

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} \sin(\pi x^2)\,dx \ge \int_0^{1/\sqrt{2}} \Phi(x)\,dx = 0 \cdot \left(\frac{1}{2} - 0\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

och

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} \sin(\pi x^2)\,dx \le \int_0^{1/\sqrt{2}} \Psi(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{2} - 0\right) + 1 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2},$$

vilket skulle visas.

Svar: Se ovan.

7) $ne^{x/n} - n = \dfrac{e^{x/n} - 1}{x/n} \cdot x \to x\,,\ n \to \infty$ och $\dfrac{\ln(1 + x^n)}{x^{n-1}} = \dfrac{\ln(1 + x^n)}{x^n} \cdot x \to x\,,\ n \to \infty$ om $0 < x < 1$ enligt ett standardgränsvärde ty $x^n \to 0\,,\ n \to \infty$ om $0 < x < 1$. Vidare är $\dfrac{\ln(1 + x^n)}{x^{n-1}} = \ln 2\,,\ \forall n$ om $x = 1$. Om $x > 1$ så gäller att $x^n \to \infty\,,\ n \to \infty$ varför $\dfrac{\ln(1 + x^n)}{x^{n-1}} = \dfrac{\ln(1 + x^n)}{1 + x^n}\left(x + \dfrac{1}{x^{n-1}}\right) \to 0\,,\ n \to \infty$ enligt ett standardgränsvärde.

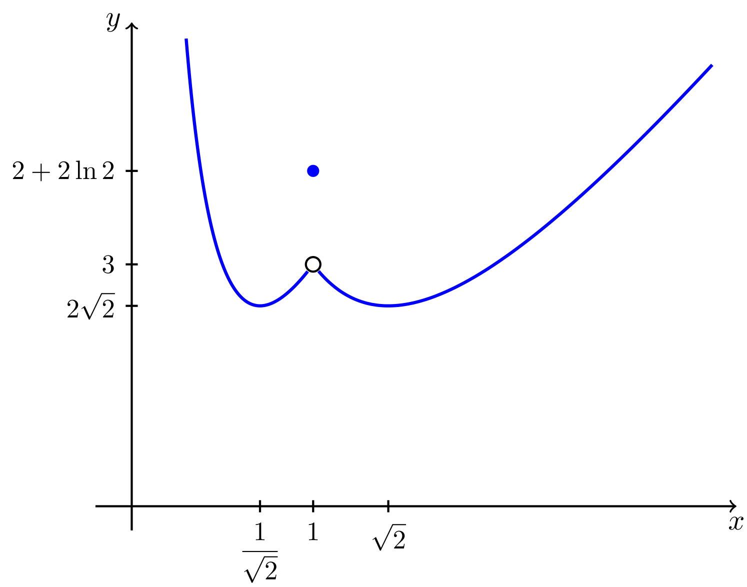
Alltså är $g(x) = \begin{cases} 2x & , \quad 0 < x < 1 \\ 1 + \ln 2 & , \quad x = 1 \\ x & , \quad x > 1 \end{cases}$, varur $g(1/x) = \begin{cases} 1/x & , \quad 0 < x < 1 \\ 1 + \ln 2 & , \quad x = 1 \\ 2/x & , \quad x > 1 \end{cases}$.

Genom att addera dessa får vi $f(x) = \begin{cases} 2x + 1/x & , \quad 0 < x < 1 \\ 2 + 2\ln 2 & , \quad x = 1 \\ x + 2/x & , \quad x > 1 \end{cases}$ och $f(x) \to \infty\,,\ x \to 0^+$ och då $x \to \infty$. Vidare: $f(x) \to 3 < 2 + 2\ln 2 = f(1)\,,\ x \to 1^{\pm}$ (ty $2\ln 2 = \ln 4 > \ln e = 1$). f är alltså inte kontinuerlig i $x = 1$ enligt 5a) och därför inte heller deriverbar där enligt 5c).

Alltså är $f'(x) = \begin{cases} 2 - 1/x^2 & , \quad 0 < x < 1 \\ 1 - 2/x^2 & , \quad x > 1 \end{cases}$ vilket ger teckentabellen

x	0		$1/\sqrt{2}$		1		$\sqrt{2}$	
$f'(x)$	ej def.	$-$	0	$+$	ej def.	$-$	0	$+$
$f(x)$	ej def.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

och därmed grafen



Svar: Graf enligt ovan. f har en lokal maximipunkt i $x = 1$ med det lokala maximivärdet $f(1) = 2 + 2\ln 2$ och lokala minimipunkter i $1/\sqrt{2}$ och $\sqrt{2}$ med de lokala minimivärdena $f(1/\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$.