LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen

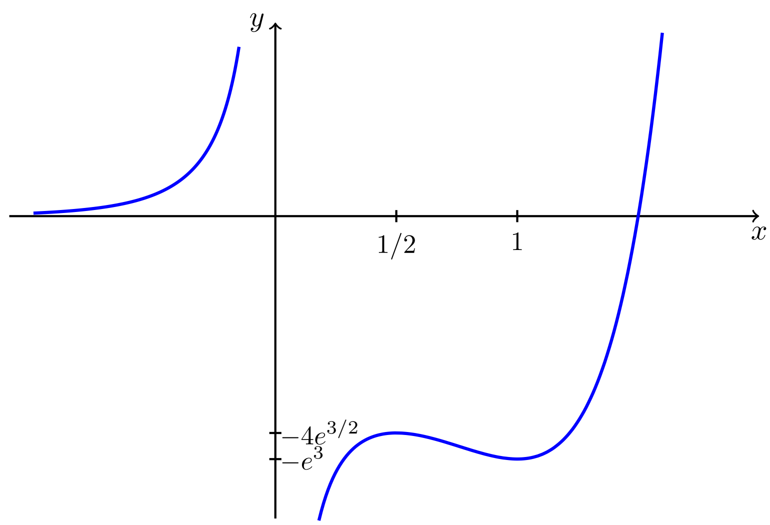
TATA41
TEN1

Lösningsskisser för TATA41 230111

1) f är definierad för $x \neq 0$. Standardräkningar (Gör dessa!) ger $f'(x) = 3e^{3x}\dfrac{(x-1)(2x-1)}{x^2}$.
Teckentabell:

x		0		$1/2$		1	
$3e^{3x}$	$+$		$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$2x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
x^2	$+$	0	$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	ej def.	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	ej def.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Vi ser att $f(x) \to 0\,,\ x \to -\infty$, $f(x) \to \infty\,,\ x \to \infty$ och att $f(x) \to \mp\infty\,,\ x \to 0^{\pm}$. Vidare är $f(1/2) = -4e^{3/2}$ och $f(1) = -e^3$. Detta ger grafen



Svar: Graf enligt ovan. Linjen $x = 0$ är lodrät asymptot och linjen $y = 0$ är vågrät asymptot då $x \to -\infty$. f har en lokal minimipunkt i $x = 1$ (med det lokala minimivärdet $f(1) = -e^3$) och en lokal maximipunkt i $x = 1/2$ (med det lokala maximivärdet $f(1/2) = -4e^{3/2}$).

2a) Bytet $t = \ln x$, $dt = dx/x$ ger (C är en godtycklig konstant)

$$\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx = \int \cos t\,dt = \sin t + C = \sin(\ln x) + C.$$

2b) Partialintegration av en etta ger (C är en godtycklig konstant)

$$\int \arctan 3x\,dx = x\arctan 3x - \int \frac{3x}{1+9x^2}\,dx = x\arctan 3x - \frac{1}{6}\ln(1+9x^2) + C.$$

2c) Polynomdivision och standardräkningar (se Ex 5.21) ger (C är en godtycklig konstant)

$$\int \frac{x^2+2}{x^2+2x+2}\,dx = \int \left(1 - \frac{2x}{(x+1)^2+1}\right) dx = x - \int \frac{2(x+1)-2}{(x+1)^2+1}\,dx$$
$$= x - \ln(x^2+2x+2) + 2\arctan(x+1) + C.$$

Svar: (a) $\sin(\ln x) + C$ (b) $x \arctan 3x - \frac{1}{6}\ln(1+9x^2) + C$ (c) $x - \ln(x^2+2x+2) + 2\arctan(x+1) + C$.

3a) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2+3x+2}{x^2-x-2} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x\to -1} \frac{x+2}{x-2} = \frac{-1+2}{-1-2} = -\frac{1}{3}.$

3b) $\frac{3x+\ln x}{\sqrt{x}-2x+\sin x} = \frac{3+\frac{\ln x}{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}-2+\frac{\sin x}{x}} \to \frac{3+0}{0-2+0} = -\frac{3}{2}$, $x\to\infty$ enl. standardgränsvärden och p g a att $\sin x$ är begränsad och $\frac{1}{x} \to 0$, $x\to\infty$ så $\frac{\sin x}{x} = \sin x \cdot \frac{1}{x} \to 0$, $x\to\infty$ enligt sats.

3c) $\lim_{x\to\infty} (2^x+5^x)^{\frac{1}{x}} = 5 \lim_{x\to\infty} \left(1+\left(\frac{2}{5}\right)^x\right)^{\frac{1}{x}} = 5\cdot(1+0)^0 = 5$ ty $\left(\frac{2}{5}\right)^x \to 0$, $x\to\infty$.

Svar: (a) $-\frac{1}{3}$ (b) $-\frac{3}{2}$ (c) 5.

4) $t=\sqrt{x} \Leftrightarrow x = t^2$, $t>0 \Rightarrow dx = 2t\,dt$ samt partialbråksuppdelning ger (I = sökt integral)

$$I = \int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{2t\,dt}{t^4+t^3} = \int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{2\,dt}{t^2(t+1)} = 2\int_{\sqrt{2}}^{\infty} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{t+1}\right) dt = 2\lim_{a\to\infty} \left[-\frac{1}{t} - \ln t + \ln(t+1)\right]_{\sqrt{2}}^{a}$$
$$= 2\lim_{a\to\infty} \left(-\frac{1}{a} + \ln\left(1+\frac{1}{a}\right)\right) + \sqrt{2} - 2\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} - \ln\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right).$$

Svar: $\sqrt{2} - \ln\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)$.

5a) Se kursboken.

5b) Då $f(x) = \int_1^{2x} \frac{e^t}{t^2}\,dt + \int_x^1 \frac{e^t}{t^2}\,dt = \int_1^{2x} \frac{e^t}{t^2}\,dt - \int_1^x \frac{e^t}{t^2}\,dt$ ger analysens huvudsats samt kedjeregeln att $f'(x) = \frac{e^{2x}}{(2x)^2}\cdot 2 - \frac{e^x}{x^2} = \frac{e^x(e^x-2)}{2x^2}$ d v s $f'(x) < 0$ då $x \in D_f$ och $e^x - 2 < 0$ d v s då $0 < x < \ln 2$, $f'(x) = 0$ då $x = \ln 2$ och $f'(x) > 0$ om $x > \ln 2$. f är alltså strängt avtagande på $]0, \ln 2]$ och strängt växande på $[\ln 2, \infty[$, vilket visar att $f(\ln 2)$ är f:s minsta värde och att detta värde inte antas någon annanstans än i $x = \ln 2$.

Svar: (a) Se kursboken. (b) f:s minsta värde antas endast för $x = \ln 2$. Se ovan för bevis.

6) Vänsterledet är definierat för $0 < x < 3$ så ekvationen är ekvivalent med

$$f(x) := \ln(3-x) + \frac{3 - x\ln x}{x-3} = k,\ 0 < x < 3.$$

Standardräkningar (Gör dessa!) ger $f'(x) = \frac{3(\ln x - 1)}{(x-3)^2}$. Teckentabell:

x	0		e		3
$3(\ln x - 1)$	ej def.	$-$	0	$+$	
$(x-3)^2$		$+$		$+$	0
$f'(x)$	ej def.	$-$	0	$+$	ej def.
$f(x)$	ej def.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	ej def.

Observera att $f(x)$ och $f'(x)$ inte är definierade för $x = 0$ och $x = 3$.

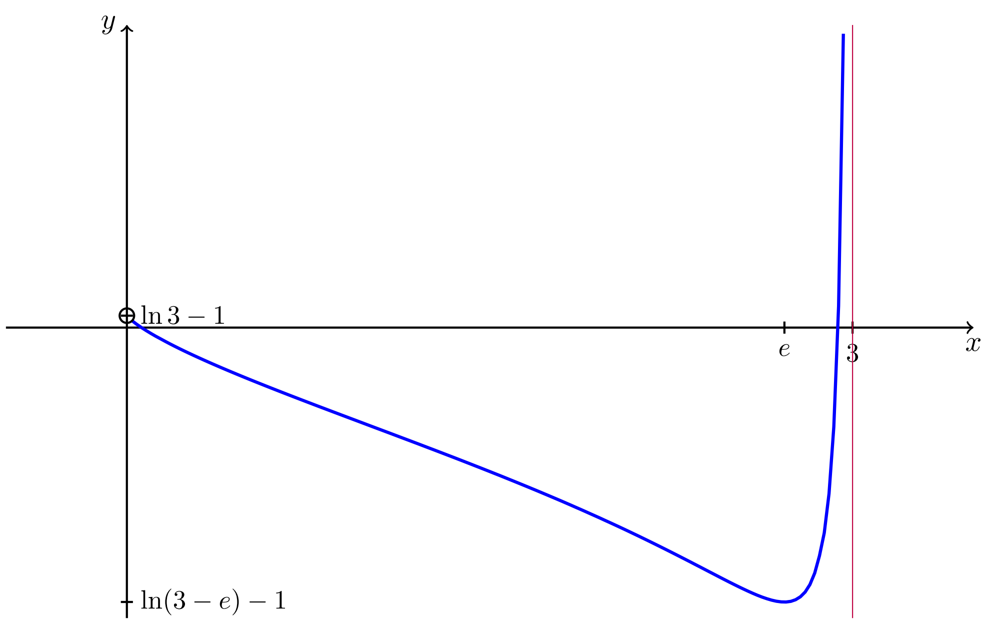
$x \ln x \to 0\,,\ x \to 0^+$ enligt ett standardgränsvärde så $f(x) \to \ln 3 - 1 > 0\,,\ x \to 0^+$.

Variabelbytet $t = 3 - x$ (så att $t \to 0^+\,,\ x \to 3^-$) ger nu att

$$f(x) = \ln t + \frac{3 - (3-t)\ln(3-t)}{-t} = \frac{1}{t}\left(t \ln t - 3 + (3-t)\ln(3-t)\right) \to \infty\,,\ x \to 3^-,$$

ty $t \ln t \to 0\,,\ t \to 0^+$ så uttrycket inom parentes $\to 3\ln 3 - 3 > 0\,,\ t \to 0^+$.

Vidare är $f(e) = \ln(3-e) - 1 < 0$. Detta ger grafen



Avläsning i grafen ger nu antalet lösningar till ekvationen för olika värden på k.

Svar: Lösning saknas om $k < \ln(3-e) - 1$. En lösning om $k = \ln(3-e) - 1$ eller $k \geq \ln 3 - 1$. Två lösningar om $\ln(3-e) - 1 < k < \ln 3 - 1$.

7) Låt $a < b < c$ vara tre olika nollställen till f. Då $f(a) = f(b) (= 0)$ och f är deriverbar överallt följer det av Rolles sats att det finns ett tal ξ_1 med $a < \xi_1 < b$ sådant att $f'(\xi_1) = 0$. Samma resonemang ger att det också finns ett tal ξ_2 med $b < \xi_2 < c$ sådant att $f'(\xi_2) = 0$. Då $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) (= 0)$ och f' är deriverbar överallt ger Rolles sats en tredje gång att det finns ett tal ξ med $\xi_1 < \xi < \xi_2$ sådant att $f''(\xi) = 0$, d v s f'' har minst ett nollställe, vilket skulle visas.

Svar: Se ovan.