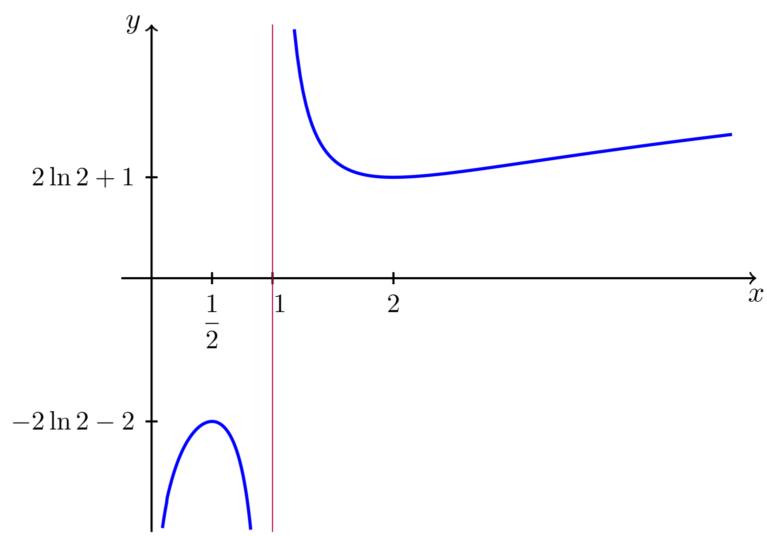
Lösningsskisser för TATA41 240603

1) f är definierad då $0 < x \neq 1$. Standardräkningar (Gör dessa!) ger $f'(x) = \dfrac{(2x-1)(x-2)}{x(x-1)^2}$.

Teckentabell:

x	0		$1/2$		1		2	
$2x-1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
x	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$(x-1)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	ej def.	$+$	0	$-$	ej def.	$-$	0	$+$
$f(x)$	ej def.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	ej def.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Vi ser att $f(x) \to -\infty\,,\ x \to 0^+$, $f(x) =\to \pm\infty\,,\ x \to 1^{\pm}$ och $f(x) \to \infty\,,\ x \to \infty$. Vidare är $f(1/2) = -2\ln 2 - 2$ och $f(2) = 2\ln 2 + 1$. Detta ger grafen



Den sökta tangentlinjen ska gå genom $(3, f(3)) = \left(3, 2\ln 3 + \dfrac{1}{2}\right)$ och ha riktningskoefficienten $f'(3) = \dfrac{5}{12}$ så den får ekvationen $y - 2\ln 3 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{12}(x-3) \Leftrightarrow 5x - 12y = 9 - 24\ln 3$.

Svar: Graf enligt ovan. f har en lokal minimipunkt i $x = 2$ (med det lokala minimivärdet $f(2) = 2\ln 2 + 1$) och en lokal maximipunkt i $x = 1/2$ (med det lokala maximivärdet $f(1/2) = -2\ln 2 - 2$). Sökta linjen har ekvationen $5x - 12y = 9 - 24\ln 3$.

2a) $\dfrac{e^{3x}-1}{\sin 2x} = \dfrac{e^{3x}-1}{3x} \cdot \dfrac{3}{2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x}} \to 1 \cdot \dfrac{3}{2 \cdot 1} = \dfrac{3}{2}\,,\ x \to 0$ enligt standardgränsvärden.

2b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+3}{x^2+2} e^{-x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3\left(1+\frac{3}{x^3}\right)}{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)} e^{-x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{e^x} \cdot \dfrac{1+\frac{3}{x^3}}{1+\frac{2}{x^2}} = 0 \cdot \dfrac{1+0}{1+0} = 0$ enligt ett standardgränsvärde.

2c) $\sqrt{x^2+2x}+x = \dfrac{(\sqrt{x^2+2x}+x)(\sqrt{x^2+2x}-x)}{\sqrt{x^2+2x}-x} = \dfrac{x^2+2x-x^2}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}-x} = /x<0/ = \dfrac{2x}{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}}-x}$

$= \dfrac{2}{-\sqrt{1+\frac{2}{x}}-1} \to \dfrac{2}{-\sqrt{1+0}-1} = -1\,,\ x\to-\infty.$

Svar: (a) $\dfrac{3}{2}$ (b) 0 (c) -1.

3a) Partialintegration av en etta ger

$$\int_0^{1/2} \arctan 2x\,dx = [x\arctan 2x]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{2x}{1+4x^2}\,dx = \frac{\pi}{8} - \left[\frac{1}{4}\ln(1+4x^2)\right]_0^{1/2} = \frac{\pi-2\ln 2}{8}.$$

3b) Bytet $t=\sin x$, $dt=\cos x\,dx$ ger $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+2\sin^2 x}\,dx = \int \frac{dt}{1+(\sqrt{2}t)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}t)+C =$ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\sin x)+C$, där C är en godtycklig konstant.

3c) Partialbråksuppdelning (gör detaljerna) ger

$$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2+x-2} = \frac{1}{3}\int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)dx = \frac{1}{3}\left[\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{3}\ln\left|-\frac{1}{2}\right| - \frac{1}{3}\ln\left|-\frac{2}{1}\right| = -\frac{2\ln 2}{3}.$$

Svar: (a) $\dfrac{\pi-2\ln 2}{8}$ (b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\sin x)+C$ (c) $-\dfrac{2\ln 2}{3}$.

4) Definitionen av generaliserad integral ger

$$\int_2^{\infty} e^{-(x-2)}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_2^{a} e^{-(x-2)}\,dx = \lim_{a\to\infty}\left[-e^{-(x-2)}\right]_2^a = \lim_{a\to\infty}\left(1-e^{-(a-2)}\right) = 1,$$

så $\displaystyle\int_2^{\infty} e^{-(x-2)}\,dx$ är konvergent med värdet 1. Observera att $|x-2| = x-2$ om $x\geq 2$ och $|x-2| = -(x-2)$ om $x\leq 2$. Detta ger att $\displaystyle\int_2^{\infty} e^{-|x-2|}\,dx$ också är konvergent med värdet 1. Betrakta nu

$$\int_{-a}^{2} e^{-|x-2|}\,dx = \int_{-a}^{2} e^{x-2}\,dx = /x=4-t\,,\ dx=-dt/ = \int_2^{a+4} e^{-(t-2)}\,dt \to 1\,,\ a\to\infty$$

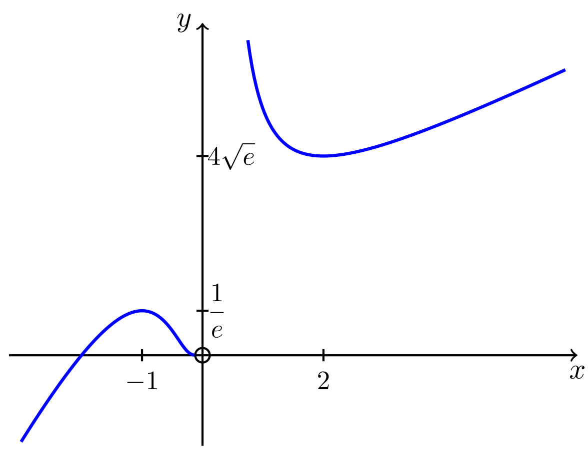
enligt ovan. Detta visar att $\displaystyle\int_{-\infty}^{2} e^{-|x-2|}\,dx$ är konvergent med värdet 1 så $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-2|}\,dx$ är konvergent med värdet $1+1=2$.

Svar: $\displaystyle\int_2^{\infty} e^{-(x-2)}\,dx = 1$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-2|}\,dx = 2$.

5) Sätt $f(x) = (x+2)e^{1/x}$, $x \neq 0$. Standardräkningar (Gör!) ger $f'(x) = \dfrac{e^{1/x}}{x^2}(x+1)(x-2)$. Detta ger teckentabellen:

x		-1		0		2	
$e^{1/x}$	$+$		$+$	ej def.	$+$		$+$
x^2	$+$		$+$	0	$+$		$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	ej def.	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	ej def.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Då $\dfrac{1}{x} \to \pm\infty$, $x \to 0^{\pm}$ och $\dfrac{1}{x} \to 0$, $x \to \pm\infty$ ser vi att $f(x) \to \pm\infty$, $x \to \pm\infty$, $f(x) \to 0$, $x \to 0^-$ och $f(x) \to \infty$, $x \to 0^+$. Vidare är $f(-1) = \dfrac{1}{e}$ och $f(2) = 4\sqrt{e}$. Detta ger grafen



Avläsning i grafen ger nu antalet lösningar för varje värde på konstanten k.

Svar: Ekvationen $f(x) = k$ saknar lösning om $\dfrac{1}{e} < k < 4\sqrt{e}$. Den har 2 lösningar om $0 < k < \dfrac{1}{e}$ eller om $k > 4\sqrt{e}$, och 1 lösning om $k \leq 0$, $k = \dfrac{1}{e}$ eller om $k = 4\sqrt{e}$.

6a) Se kursboken eller föreläsningsanteckningarna.

6b) Sätt $f(x) = |x-5|$. Då är $f(x) \geq 0 = f(5)$ för alla $x \in \mathbf{R}$ så $x = 5$ är inte bara ett lokalt, utan t o m ett globalt minimum till f (d v s f:s minsta värde antas där). f är självklart kontinuerlig för $x \neq 5$ och att f är kontinuerlig även i $x = 5$ följer av att $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^+} x - 5 = 0 = f(5)$ och $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^-} -(x-5) = 0 = f(5)$. f är dock ej deriverbar i $x = 5$ ty $\dfrac{f(5+h) - f(5)}{h} = \dfrac{|h|}{h}$ saknar gränsvärde då $h \to 0$.

6c) För $x \neq 0$ är $f(x) = 2x^2 + x^2 \sin\dfrac{1}{x} \geq 2x^2 + x^2 \cdot (-1) = x^2 > 0 = f(0)$ ty $\sin t \geq -1$ för alla t. Detta visar att f har ett strängt lokalt (t o m globalt) minimum i $x = 0$.

Svar: (a) Se ovan. (b) T ex $f(x) = |x-5|$ (c) f har ett strängt lokalt minimum i $x = 0$.

7a) Om $x > c$ ligger x ej i C_y enligt definitionen av c. Alltså är $f(x) \geq y$ för $x > c$. Då f är kontinuerlig följer att $f(c) = \lim\limits_{x\to c^+} f(x) \geq y$.

7b) Enligt definitionen av kontinuitet är $\lim_{x \to d} f(x) = f(d)$. Om $d \in [c, b]$, $f(d) > y$ så är $\varepsilon = f(d) - y > 0$ och enligt gränsvärdesdefinitionen finns ett tal $\delta > 0$ sådant att $|f(x) - f(d)| < \varepsilon$ närhelst $|d - x| < \delta$. Då $|f(x) - f(d)| < \varepsilon$ är speciellt $f(x) > f(d) - \varepsilon = f(d) - (f(d) - y) = y$ för $|d - x| < \delta$, vilket visar första delen.

Återstår att visa att $c \neq d$. Detta följer av att om $c = d$ och δ är som ovan så är $f(x) > y$ närhelst $|c - x| < \delta$ d v s $f(x) \geq y$ om $x > c - \delta$. Det följer att om $x \in C_y$ så är $x \leq c - \delta < c$ vilket strider mot att c var det *minsta* talet med denna egenskap. P g a denna motsägelse måste $c < d$.

7c) Från (a) är $f(c) \geq y$ och vi visade i (b) att om $f(d) > y$ och $c \leq d$ så är i själva verket $c < d$. Det är alltså omöjligt att $f(c) > y$ så endast möjligheten $f(c) = y$ återstår.

Anmärkning 1: Talet c definierat som det minsta talet med egenskapen att $x \leq c$ för alla $x \in C_y$ brukar kallas *supremum* av mängden C_y (skrivs $c = \sup C_y$). Man kan visa att om $M \subset \mathbf{R}$ är en begränsad mängd så existerar alltid $\sup M$ ändligt, även om M inte har något största element. Se Appendix A i kursboken för fler detaljer.

Anmärkning 2: Ovanstående resonemang ger ett bevis för satsen om mellanliggande värde. Även här går det att konsultera Appendix A i kursboken för fler detaljer.

Svar: Se ovan.