Lösningsskisser för TATA41 240827

1a) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+\frac{1}{2})^2-(\frac{5}{2})^2}{(x-\frac{5}{2})^2-(\frac{1}{2})^2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+\frac{1}{2}+\frac{5}{2})(x+\frac{1}{2}-\frac{5}{2})}{(x-\frac{5}{2}+\frac{1}{2})(x-\frac{5}{2}-\frac{1}{2})}=\lim_{x\to 2}\frac{x+3}{x-3}=-5.$

1b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(e^{3x}-1)^2}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{3x}-1}{3x}\right)^2\cdot\frac{9}{\frac{\ln(1+x)}{x}}=1^2\cdot\frac{9}{1}=9$ enligt standardgränsvärden.

1c) $\displaystyle\frac{\ln(1+2^x)}{\ln(1+3^x)}=\frac{\ln 2^x+\ln(1+2^{-x})}{\ln 3^x+\ln(1+3^{-x})}=\frac{x\ln 2+\ln(1+2^{-x})}{x\ln 3+\ln(1+3^{-x})}=\frac{\ln 2+\frac{\ln(1+2^{-x})}{x}}{\ln 3+\frac{\ln(1+3^{-x})}{x}}\to\frac{\ln 2}{\ln 3}\,,\ x\to\infty,$

ty $2^{-x},3^{-x}\to 0\,,\ x\to\infty.$

Svar: (a) -5 (b) 9 (c) $\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$.

2) f är definierad då $x\neq -3$. Standardräkningar (Gör dessa!) ger $f'(x)=\dfrac{3(x+1)(7-x)}{(x+3)^2(x^2+1)}$.

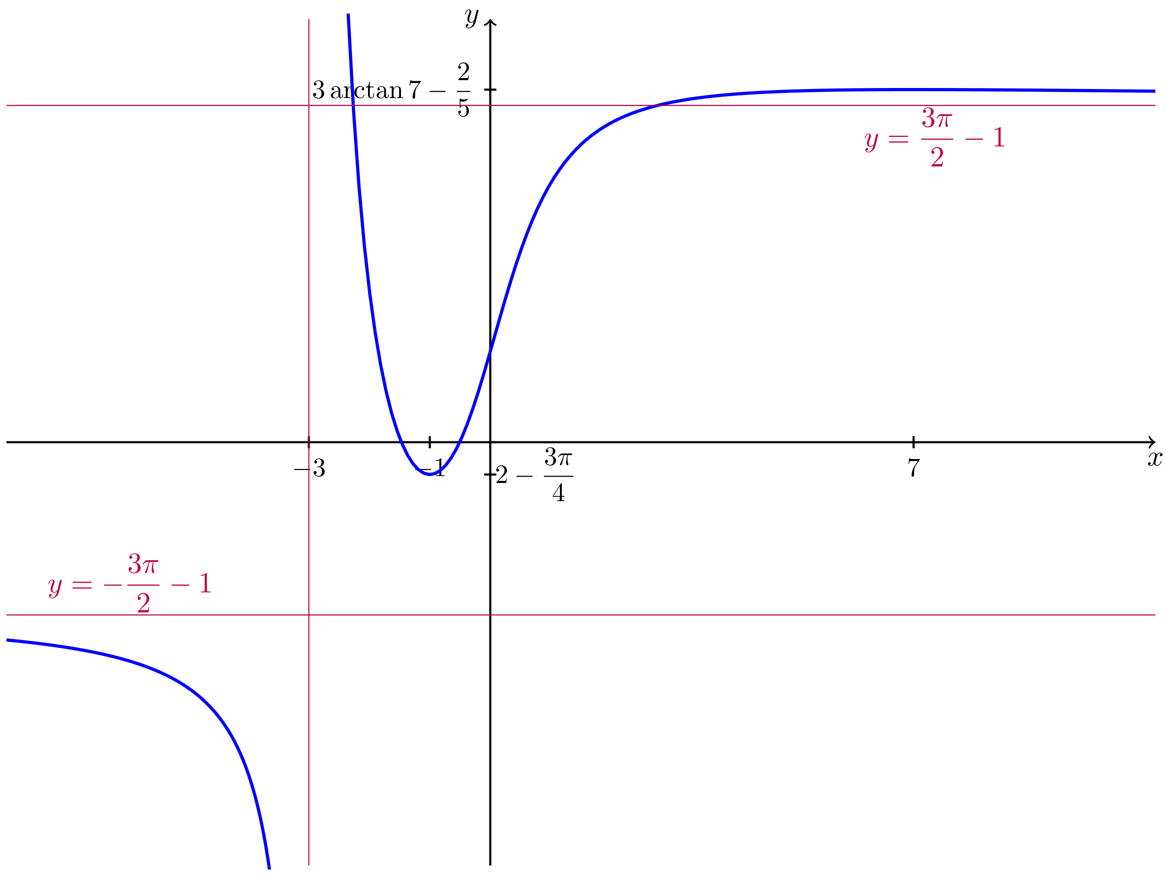
Teckentabell:

x		-3		-1		7	
$3(x+1)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$7-x$	$+$		$+$		$+$	0	$-$
x^2+1	$+$		$+$		$+$		$+$
$(x+3)^2$	$+$	0	$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	$-$	ej def.	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	ej def.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

Vi ser att $f(x)\to\pm\infty\,,\ x\to -3^{\pm}$ och $f(x)=\dfrac{-1+\frac{3}{x}}{1+\frac{3}{x}}+3\arctan x\to -1\pm\dfrac{3\pi}{2}\,,\ x\to\pm\infty.$

Vidare är $f(-1)=2-\dfrac{3\pi}{4}$ och $f(7)=3\arctan 7-\dfrac{2}{5}$.

Svar: För graf, se nästa sida (högra halvan av bilden lite förstorad för ökad tydlighet). f har en lokal minimipunkt i $x=-1$ (med det lokala minimivärdet $f(-1)=2-\dfrac{3\pi}{4}$) och en lokal maximipunkt i $x=7$ (med det lokala maximivärdet $f(7)=3\arctan 7-\dfrac{2}{5}$). Linjen $y=\dfrac{3\pi}{2}-1$ är vågrät asymptot då $x\to\infty$ och linjen $y=-\dfrac{3\pi}{2}-1$ är vågrät asymptot då $x\to-\infty$.



3a)

$$\int \frac{2x+1}{x^2+4x+5}\,dx = \int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,dx - 3\int \frac{dx}{(x+2)^2+1} = \ln(x^2+4x+5) - 3\arctan(x+2) + C,$$

där C är en godtycklig konstant.

3b) En partialintegration ger (C är en godtycklig konstant).

$$\int \frac{x}{e^{2x}}\,dx = \int xe^{-2x}\,dx = -\frac{x}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\,dx = -\frac{2x+1}{4}e^{-2x} + C.$$

3c) Bytet $t = \cos x$, $dt = -\sin x\,dx$ ger (C är en godtycklig konstant).

$$\int \sin^3 x\,dx = \int \sin x(1-\cos^2 x)\,dx = -\int (1-t^2)\,dt = \frac{t^3}{3} - t + C = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C.$$

Svar: (a) $\ln(x^2+4x+5) - 3\arctan(x+2) + C$ (b) $-\frac{2x+1}{4}e^{-2x} + C$ (c) $\frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$.

4) Partialbråksuppdelning ger

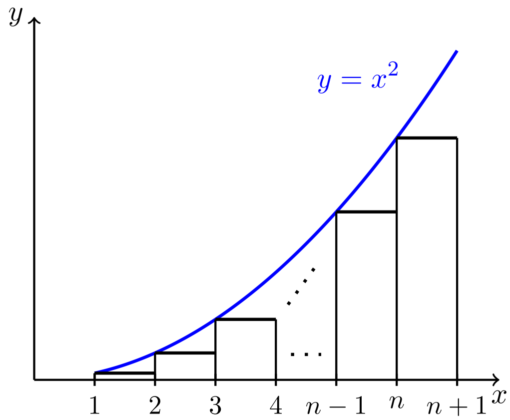
$$\int_2^a \frac{dx}{x^4-1} = \frac{1}{4}\int_2^a \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2+1}\right)dx = \frac{1}{4}\left[\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - 2\arctan x\right]_2^a$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln\frac{1-\frac{1}{a}}{1+\frac{1}{a}} - 2\arctan a - \ln\frac{1}{3} + 2\arctan 2\right) \to \frac{1}{4}(\ln 3 + 2\arctan 2 - \pi)\ , \ a \to \infty$$

så $\int\limits_2^\infty \frac{dx}{x^4-1}$ är konvergent med värdet $\frac{1}{4}(\ln 3 + 2\arctan 2 - \pi)$.

Svar: $\int\limits_2^\infty \frac{dx}{x^4-1} = \frac{1}{4}(\ln 3 + 2\arctan 2 - \pi)$.

5) Låt $x \geq 1$ och sätt $f(x) = x^2$. f är då strängt växande på $[1, \infty[$ och f:s graf har utseendet:



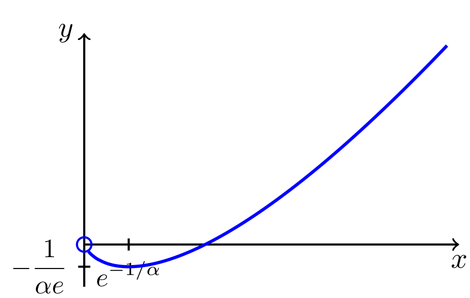
Standardjämförelse mellan staplarnas sammanlagda area och arean mellan f:s graf och x-axeln ger att $1^2 \cdot 1 + 2^2 \cdot 1 + 3^2 \cdot 1 + \cdots + (n-1)^2 \cdot 1 + n^2 \cdot 1 = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2$ är en undersumma till $\int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx$. Detta ger

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \leq \int\limits_1^{n+1} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^{n+1} = \frac{(n+1)^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{n^3}{3} + n^2 + n,$$

vilket skulle visas.

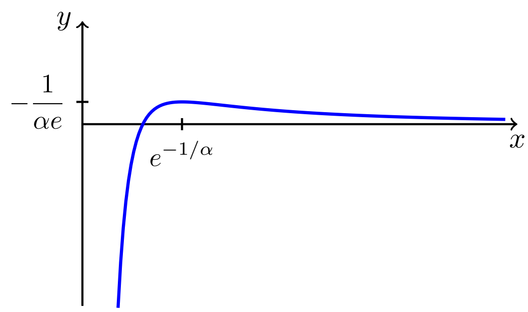
Svar: Se ovan.

6) Om $\alpha = 0$ är $f(x) = \ln x$ så för $\alpha = 0$ är $V_f = \mathbf{R}$.
Antag nu att $\alpha > 0$. Standardräkningar (Gör!) ger $f'(x) = x^{\alpha-1}(\alpha \ln x + 1)$ och uttrycket inom parentes är strängt växande och $= 0 \Leftrightarrow x = e^{-1/\alpha}$. Alltså är $f'(x) < 0$ för $0 < x < e^{-1/\alpha}$ och $f'(x) > 0$ för $x > e^{-1/\alpha}$. Då $f(e^{-1/\alpha}) = -\frac{1}{\alpha e}$, $f(x) \to 0\,,\ x \to 0^+$ (standardgränsvärde) och $f(x) \to \infty\,,\ x \to \infty$ får f grafen



Avläsning i grafen ger att $V_f = \left[-\frac{1}{\alpha e}, \infty\right[$ för $\alpha > 0$.

Återstår fallet $\alpha < 0$ (så att $-\alpha > 0$). Som ovan är $f'(x) = x^{\alpha-1}(\alpha \ln x + 1)$, men nu är uttrycket inom parentes strängt avtagande så $f'(x) > 0$ för $0 < x < e^{-1/\alpha}$ och $f'(x) < 0$ för $x > e^{-1/\alpha}$. Då $f(x) = \frac{\ln x}{x^{-\alpha}}$ följer att $f(x) \to -\infty\,,\ x \to 0^+$ och att $f(x) \to 0\,,\ x \to \infty$ (standardgränsvärde), vilket ger grafen



och direkt avläsning ger att $V_f = \left]-\infty, -\frac{1}{\alpha e}\right]$ för $\alpha < 0$.

Svar: $V_f = \left[-\frac{1}{\alpha e}, \infty\right[$ om $\alpha > 0$, $V_f = \mathbf{R}$ om $\alpha = 0$ och $V_f = \left]-\infty, -\frac{1}{\alpha e}\right]$ om $\alpha < 0$.

7a) Låt $\varepsilon = |\lim_{x\to 0^+} f'(x)|/2$. Enligt gränsvärdesdefinitionen finns $\delta > 0$ så att $|f'(x) - \lim_{x\to 0^+} f'(x)| < \varepsilon$ för alla $0 < x < \delta$. För varje sådant x gäller då att $f'(x) < \lim_{x\to 0^+} f'(x) + \varepsilon = \lim_{x\to 0^+} f'(x)/2 < 0$. Enligt sats är då f strängt avtagande på $[0, \delta]$ varför $f(x) < f(0) = 0$ för $0 < x \leq \delta$, vilket skulle visas.

7b) Låt $a > 0$. Då är enligt förutsättning f' deriverbar för $x > a$ och kontinuerlig för $x \geq a$. Om $x > a$ finns då enligt medelvärdessatsen ett tal ξ med $a < \xi < x$ sådant att $f'(x) - f'(a) = f''(\xi)(x-a) \geq c(x-a) \to \infty\,,\ x \to \infty$ så instängningsregeln ger att $f'(x) - f'(a) \to \infty\,,\ x \to \infty$. Då a ej beror på x följer att $f'(x) \to \infty\,,\ x \to \infty$, vilket skulle visas.

7c) Enligt b) finns ett tal M sådant att $f'(x) > 1$ för $x \geq M$. För $x > M$ gäller enligt insättningsformeln att

$$f(x) = f(M) + \int_M^x f'(x)\,dx \geq f(M) + \int_M^x dx = f(M) + x - M \to \infty\,,\ x \to \infty$$

Speciellt är alltså $f(x) > 0$ för tillräckligt stora x och enligt a) var $f(\delta) < 0$. Enligt satsen om mellanliggande värde finns då en punkt $x_0 > \delta > 0$ sådan att $f(x_0) = 0$, vilket skulle visas.

Svar: Se ovan.