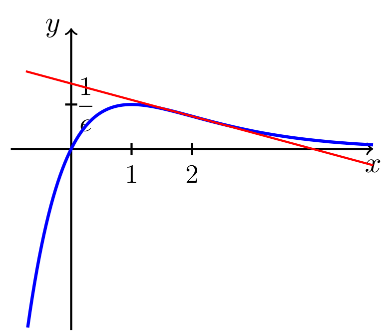
Lösningsskisser för TATA41 250115

1) f är definierad för alla $x \in \mathbf{R}$. Standardräkningar (Gör dessa!) ger $f'(x) = (1-x)e^{-x}$. Den efterfrågade tangentlinjen har riktningskoefficient $f'(2) = -\dfrac{1}{e^2}$ och får därför ekvationen $y - \dfrac{2}{e^2} = -\dfrac{1}{e^2}(x-2) \Leftrightarrow x + e^2 y = 4$. Teckentabell:

x		1	
$1-x$	$+$	0	$-$
e^{-x}	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

Vi ser att $f(x) \to -\infty\,,\ x \to -\infty$ och $f(x) = \dfrac{x}{e^x} \to 0\,,\ x \to \infty$ enligt ett standardgränsvärde. Vidare är $f(1) = \dfrac{1}{e}$ och $f(0) = 0$. Detta ger grafen (med tillhörande tangentlinje):



Direkt avläsning i grafen ger oss nu vårt svar:

Svar: För graf, se ovan. f har en lokal maximipunkt i $x = 1$ med det lokala maximivärdet $f(1) = \dfrac{1}{e}$. $V_f = \left]-\infty, \dfrac{1}{e}\right]$. Sökta tangentlinjen är $x + e^2 y = 4$.

2a) $\displaystyle \lim_{x\to-1} \frac{2x^2 - x - 3}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x\to-1} \frac{(x+1)(2x-3)}{(x+1)(x+2)} = \lim_{x\to-1} \frac{2x-3}{x+2} = \frac{-2-3}{-1+2} = -5.$

2b) Konjugatförlängning ger (observera att $x > 0$ så $|x| = x$)

$$x - \sqrt{x^2 - 4x + 1} = \frac{x^2 - (x^2 - 4x + 1)}{x + \sqrt{x^2 - 4x + 1}} = \frac{4x - 1}{x + |x|\sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}} = \frac{4 - \frac{1}{x}}{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}} \to 2\,,\ x \to \infty.$$

2c) Bytet $t = x - \pi/2$ ger $\dfrac{\cos 3x}{\cos x} = \dfrac{\cos\left(3t + \frac{3\pi}{2}\right)}{\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right)} = \dfrac{\sin 3t}{-\sin t} = -\dfrac{\sin 3t}{3t} \cdot \dfrac{3}{\frac{\sin t}{t}} \to -1 \cdot \dfrac{3}{1} = -3\,,\ t \to 0$ d v s då $x \to \pi/2$ enligt ett standardgränsvärde.

Alternativ: $\dfrac{\cos 3x}{\cos x} = \dfrac{\cos(x+2x)}{\cos x} = \dfrac{\cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x}{\cos x} = \cos 2x - 2\sin^2 x.$

Svar: (a) -5 (b) 2 (c) -3.

3a) Bytet $t = \dfrac{x+1}{2}$, $dx = 2dt$ ger $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2+2x+5}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{2x+3}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{4t+1}{t^2+1}\,dt =$ $\ln(t^2+1) + \dfrac{1}{2}\arctan t + C_1 = \ln(x^2+2x+5) + \dfrac{1}{2}\arctan\left(\dfrac{x+1}{2}\right) + C$, där $C = C_1 - \ln 4$ är en godtycklig konstant.

3b) Bytet $t = \ln x$, $dt = dx/x$ ger $\displaystyle\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx = \int \sin t\,dt = -\cos t + C = -\cos(\ln x) + C$, där C är en godtycklig konstant.

3c) Då integranden är udda och intervallet symmetriskt följer att $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2 \sin x\,dx = 0.$

Alternativ: Partialintegrera två gånger.

Svar: (a) $\ln(x^2+2x+5) + \dfrac{1}{2}\arctan\left(\dfrac{x+1}{2}\right) + C$ (b) $-\cos(\ln x) + C$ (c) 0.

4) Integranden är begränsad på $[2,\infty[$ så integralen är bara generaliserad i ∞. Låt $b > 2$, $a = \sqrt{b}$. Bytet $t = \sqrt{x}$, $dt = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$ följt av en partialbråksuppdelning ger

$$\begin{aligned}\int_2^b \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}(x-1)}\,dx &= \int_{\sqrt{2}}^a \frac{2t-4}{t^2-1}\,dt = \int_{\sqrt{2}}^a \left(\frac{3}{t+1} - \frac{1}{t-1}\right)dt = \Big[3\ln|t+1| - \ln|t-1|\Big]_{\sqrt{2}}^a \\ &= 3\ln(a+1) - \ln(a-1) - 3\ln(\sqrt{2}+1) + \ln(\sqrt{2}-1) \\ &= 2\ln a + 3\ln\left(1+\frac{1}{a}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{a}\right) - 3\ln(\sqrt{2}+1) + \ln(\sqrt{2}-1) \to \infty\,,\ a\to\infty,\end{aligned}$$

ty $2\ln a \to \infty\,,\ a \to \infty \Leftrightarrow b \to \infty$ och övriga termer har ändliga gränsvärden. $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}(x-1)}\,dx$ är alltså divergent.

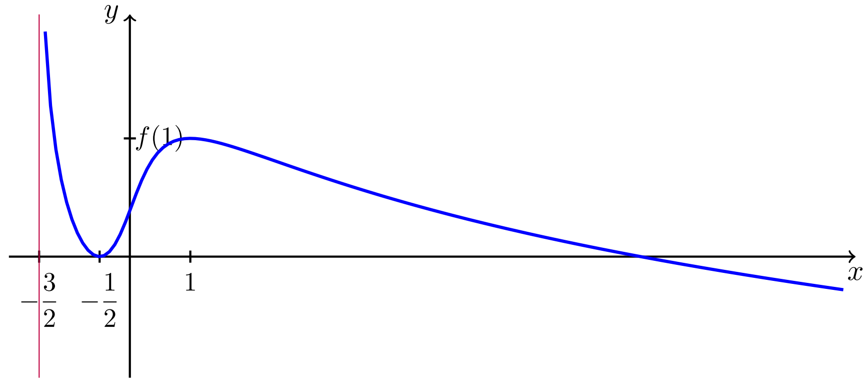
Svar: Integralen är divergent.

5) f är definierad för alla $x > -3/2$. Standardräkningar (Gör dessa!) ger $f'(x) = \dfrac{4(1-x)(2x+1)}{(2x+3)(4x^2+1)}$.

Teckentabell:

x	$-3/2$		$-1/2$		1	
$4(1-x)$		$+$		$+$	0	$-$
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$
$2x+3$	0	$+$		$+$		$+$
$4x^2+1$		$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	ej def.	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	ej def.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

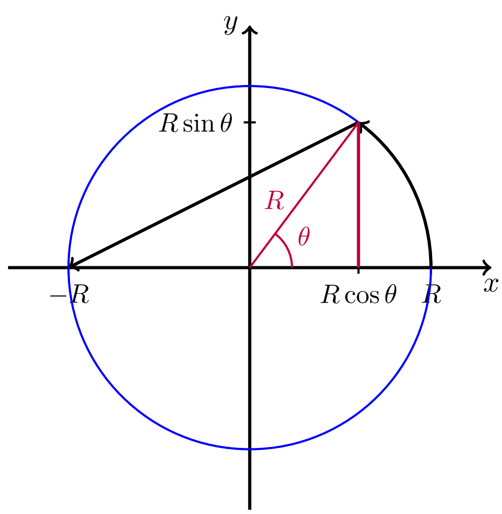
Vi ser att $f(x) \to \infty\,,\ x \to -3/2^+$ och $f(x) \to -\infty\,,\ x \to \infty$. Vidare är $f(1) = \arctan 2 - \ln\dfrac{5}{2} + \dfrac{\pi}{4}$ och $f(-1/2) = 0$. Detta ger grafen:



Direkt avläsning i grafen ger att f har två nollställen.

Svar: Två nollställen.

6) Välj tidsenhet så att du simmar med hastigheten 1 längdenhet/tidsenhet och går med hastigheten 2 längdenheter/tidsenhet. Inför sedan ett koordinatsystem genom att placera origo i bassängens centrum och låt x-axeln vara parallell med linjen genom dig själv och origo så att du står i punkten $(R, 0)$. Antag att du följer bassängkanten moturs längs en cirkelbåge svarande mot vinkeln θ, $0 \leq \theta \leq \pi$ innan du hoppar i vattnet och simmar den återstående sträckan. Att gå medurs ger samma resultat av symmetriskäl så det räcker att undersöka detta fall.



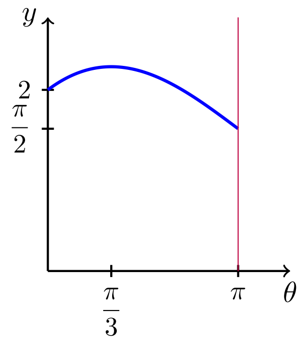
Den totala tiden T som hela förflyttningen tar ges då, enligt definitionen av vinkel samt Pythagoras sats, av

$$T = \frac{R\theta}{2} + \sqrt{(R + R\cos\theta)^2 + (R\sin\theta)^2} = \frac{R\theta}{2} + R\sqrt{2 + 2\cos\theta} = \frac{R\theta}{2} + R\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{R\theta}{2} + 2R\cos\frac{\theta}{2},$$

ty $\cos\frac{\theta}{2} \geq 0$. Sätt $f(\theta) = \frac{\theta}{2} + 2\cos\frac{\theta}{2}$, $0 \leq \theta \leq \pi$ så att $T = Rf(\theta)$. Derivering ger $f'(\theta) = \frac{1}{2} - \sin\frac{\theta}{2}$ så $f'(\theta)$ är strängt avtagande och $= 0 \Leftrightarrow \theta = \pi/3$. Teckentabell:

x	0		$\pi/3$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	

Vidare är $f(0) = 2$ och $f(\pi) = \pi/2 < f(0)$. Grafen $y = f(\theta)$ får därmed följande utseende:



Direkt avläsning i grafen ger att f:s minsta värde är $f(\pi) = \pi/2$. Snabbaste sättet att ta sig till motsatta punkten på bassängen är alltså att gå hela vägen.

Svar: Doppet får vänta. Det går snabbast att gå hela vägen.

7a) h är en trappfunktion och alltså integrerbar på varje begränsat intervall (att h är växande och därmed monoton visar också integrerbarheten). Definitionen av integral av trappfunktion ger att $\int_0^b h(t)\,dt = 0 \cdot (b-0) = 0$ om $b < a$. Om $b \geq a$ ger samma definition att $\int_0^b h(t)\,dt = 0 \cdot (a-0) + 1 \cdot (b-a) = b-a$.

7b) Då $h(t)$ och därmed $e^t h(t)$ är kontinuerlig på $[0,a]$ ger analysens huvudsats att $f'(x) = e^x h(x) = 0$ för $x < a$. Låt $b > a$ vara godtycklig. Då är $e^t h(t)$ kontinuerlig på $[b, \infty[$ och om $x > b$ är $f(x) = \int_a^b e^t h(t)\,dt + \int_b^x e^t h(t)\,dt$ så analysens huvudsats ger att $f'(x) = e^x h(x) = e^x$ då första termen ej beror på x. Då $b > a$ var godtycklig följer att $f'(x) = e^x$ för alla $x > a$.

Vi beräknar f:s vänster- och högerderivata i $x = a$ (observera att $f(a) = \int_0^a e^t h(t)\,dt = 0$):

$$f'_-(a) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{h}\int_0^{a+h} e^t h(t)\,dt = /a+h<a/ = \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{h} \cdot 0 = 0,$$

$$f'_+(a) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_0^{a+h} e^t h(t)\,dt = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_a^{a+h} e^t\,dt = \lim_{h\to 0^+} e^a \frac{e^h-1}{h} = e^a,$$

enligt ett standardgränsvärde. Då f:s vänster- och högerderivata i $x = a$ är olika följer att $f'(a)$ inte existerar.

Svar: (a) $\int_0^b h(t)\,dt = 0$ om $b < a$, $\int_0^b h(t)\,dt = b-a$ om $b \geq a$. (b) $f'(x) = 0$ för $x < a$, $f'(x) = e^x$ för $x > a$. $f'(x)$ existerar inte om $x = a$.