

### Lösningsskisser för TATA41 250326

1a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{2x}}{e^{\sqrt{3x}-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{2x}}{\sqrt{2x}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\frac{e^{\sqrt{3x}-1}}{\sqrt{3x}}} = 1 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{1} = \sqrt{\frac{2}{3}}$  enligt standardgränsvärden.

1b)  $\frac{x^2 + x - 6}{\ln(5 - 2x)} = \frac{(x - 2)(x + 3)}{\ln(1 - 2(x - 2))} = /t = x - 2/ = \frac{t(t + 5)}{\ln(1 - 2t)} = \frac{t + 5}{\frac{\ln(1-2t)}{-2t} \cdot (-2)} \rightarrow -\frac{5}{2}, t \rightarrow 0,$   
 d v s då  $x \rightarrow 2$ , enligt ett standardgränsvärde.

1c)  $\frac{\ln(2x^3 + e^{4x})}{x} = \frac{\ln e^{4x} + \ln\left(1 + \frac{2x^3}{e^{4x}}\right)}{x} = 4 + \frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{2}{4^3} \cdot \frac{(4x)^3}{e^{4x}}\right) \rightarrow 4 + 0 \cdot \ln\left(1 + \frac{2}{4^3} \cdot 0\right) = 4, x \rightarrow \infty$  enligt ett standardgränsvärde.

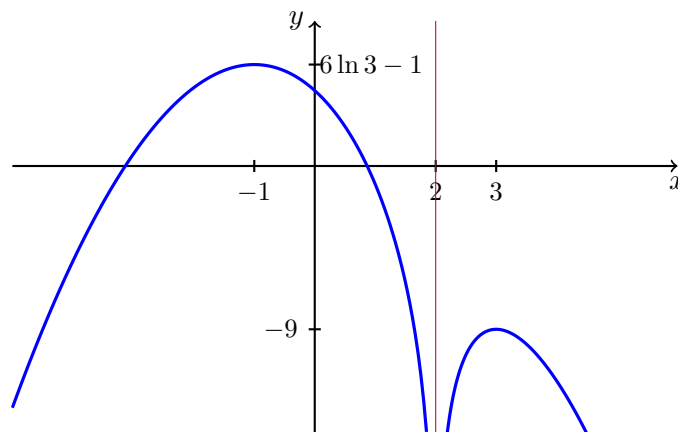
**Svar:** (a)  $\sqrt{\frac{2}{3}}$  (b)  $-\frac{5}{2}$  (c) 4.

2)  $f$  är definierad då  $x \neq 2$ . Standardräkningar (Gör dessa!) ger  $f'(x) = \frac{2(x+1)(3-x)}{x-2}$ .

Teckentabell:

$x$		-1		2		3	
$2(x+1)$	-	0	+		+		+
$3-x$	+		+		+	0	-
$x-2$	-		-	0	+		+
$f'(x)$	+	0	-	ej def.	+	0	-
$f(x)$	↗	lok. max.	↘	ej def.	↗	lok. max.	↘

Vi ser att  $f(x) = 6 \ln|x - 2| - x^2 \rightarrow -\infty, x \rightarrow 2$  (ty första termen  $\rightarrow -\infty$  och den andra har ändligt gränsvärde) och  $f(x) = x^2 \left(6 \frac{\ln|x|}{x^2} + 6 \frac{\ln|1 - \frac{2}{x}|}{x^2} - 1\right) \rightarrow -\infty, x \rightarrow \pm\infty$  då uttrycket inom parentes går mot -1 enligt standardgränsvärde. Vidare är  $f(-1) = 6 \ln 3 - 1$  och  $f(3) = -9$ . Detta ger grafen



**Svar:** För graf, se ovan.  $f$  har lokala maximipunkter i  $x = -1$  (med det lokala maximivärdet  $f(-1) = 6 \ln 3 - 1$ ) och i  $x = 3$  (med det lokala maximivärdet  $f(3) = -9$ ). Lokala minimipunkter saknas. Linjen  $x = 2$  är lodrät asymptot och vågräta asymptoter saknas.

3a) Partialintegration av en etta ger

$$\int_0^2 \ln(x+1) dx = [(x+1) \ln(x+1)]_0^2 - \int_0^2 (x+1) \cdot \frac{1}{x+1} dx = 3 \ln 3 - [x]_0^2 = 3 \ln 3 - 2.$$

**Anmärkning:** Att använda  $x$  som primitiv till 1 istället för  $x+1$  funkar förstås också, men ger lite längre räkningar.

3b) Bytet  $t = e^{2x} \Rightarrow dt = 2e^{2x} dx = 2t dx \Leftrightarrow dx = \frac{dt}{2t}$  följt av partialbråksuppdelning ger

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{dx}{e^{2x} + 1} &= \int_1^{e^{2a}} \frac{dt}{2t(t+1)} = \frac{1}{2} \int_1^{e^{2a}} \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \frac{1}{2} \left[ \ln \left| \frac{t}{t+1} \right| \right]_1^{e^{2a}} \\ &= \frac{1}{2} \left( \ln \frac{e^{2a} + 1}{e^{2a} + 2} - \ln \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \left( \ln 2 - \ln \left( 1 + \frac{1}{e^{2a}} \right) \right) \rightarrow \frac{\ln 2}{2}, \quad a \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

så  $\int_0^a \frac{dx}{e^{2x} + 1} \rightarrow \frac{\ln 2}{2}$ ,  $a \rightarrow \infty$ .  $\int_0^\infty \frac{dx}{e^{2x} + 1}$  är alltså konvergent och  $\int_0^\infty \frac{dx}{e^{2x} + 1} = \frac{\ln 2}{2}$ .

**Anmärkning:** Bytet  $t = e^{-2x}$  fungerar också och ger aningen kortare räkningar.

**Svar:** (a)  $3 \ln 3 - 2$  (b)  $\int_0^\infty \frac{dx}{e^{2x} + 1} = \frac{\ln 2}{2}$  och är därmed konvergent.

4a) Variabelbytet  $t = \sqrt{x-3} \Leftrightarrow x = t^2 + 3$ ,  $t \geq 0 \Rightarrow dx = 2t dt$  ger att

$$\int \frac{x}{\sqrt{x-3}} dx = \int \frac{t^2 + 3}{t} \cdot 2t dt = \frac{2t^3}{3} + 6t + C = \frac{2}{3}(x+6)\sqrt{x-3} + C,$$

där  $C$  är en godtycklig konstant.

4b) Trigonometriska ettan samt bytet  $t = \cos x$ ,  $dt = -\sin x dx$  ger ( $C$  är en godtycklig konstant):

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x}{3 - \sin^2 x} dx &= \int \frac{\sin x}{2 + \cos^2 x} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2} = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \arctan \left( \frac{t}{\sqrt{2}} \right) + C \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right) + C. \end{aligned}$$

4c) Jämn funktion, symmetriskt intervall ger ( $I =$  sökt integral):

$$I = 2 \int_0^{1/2} x \sin(\pi x) dx = \frac{2}{\pi} [-x \cos(\pi x)]_0^{1/2} + \frac{2}{\pi} \int_0^{1/2} \cos(\pi x) dx = \frac{2}{\pi^2} [\sin(\pi x)]_0^{1/2} = \frac{2}{\pi^2}.$$

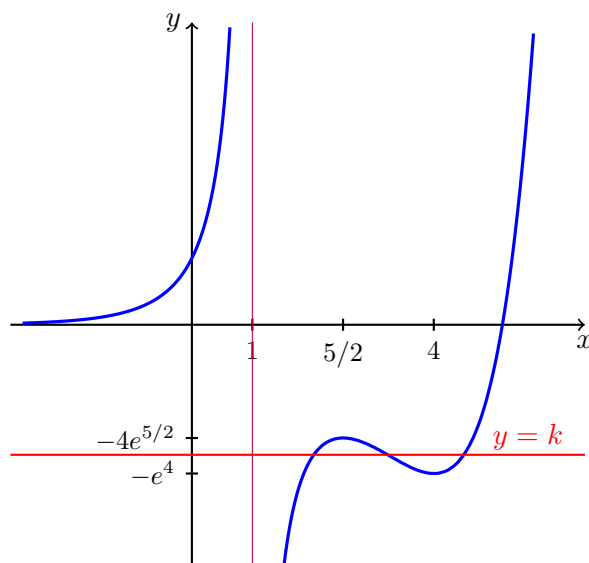
**Svar:** (a)  $\frac{2}{3}(x+6)\sqrt{x-3} + C$  (b)  $-\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right) + C$  (c)  $\frac{2}{\pi^2}$ .

5)  $f$  är definierad för  $x \neq 1$ . Standardräkningar (Gör!) ger  $f'(x) = \frac{(2x-5)(x-4)}{(x-1)^2} e^x$ .

Teckentabell:

$x$	1		5/2		4		
$e^x$	+	+	+	+	+	+	
$2x-5$	-	-	0	+	+	+	
$x-4$	-	-	-	0	+	+	
$(x-1)^2$	+	0	+	+	+	+	
$f'(x)$	+	ej def.	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	ej def.	↗	lok. max.	↘	lok. min.	↗

Vi ser att  $f(x) \rightarrow \mp\infty$ ,  $x \rightarrow 1^\pm$  och  $f(x) = \frac{2-\frac{11}{x}}{1-\frac{1}{x}} e^x \rightarrow \infty$ ,  $x \rightarrow \infty$  och på samma sätt  $f(x) \rightarrow 0$ ,  $x \rightarrow -\infty$ . Vidare är  $f(5/2) = -4e^{5/2}$  och  $f(4) = -e^4$ . Detta ger grafen



Direkt avläsning i grafen ger att ekvationen  $f(x) = \frac{2x-11}{x-1} e^x = k$  har exakt tre olika lösningar precis då  $-e^4 < k < -4e^{5/2}$ .

**Svar:**  $-e^4 < k < -4e^{5/2}$ .

6a) Se kursboken eller föreläsninganteckningarna.

6b) Omflyttning av termer följt av konjugatförlängning ger

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{(x+h)\sqrt{x+h} - x\sqrt{x}}{h} = \sqrt{x+h} + x \cdot \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\ &= \sqrt{x+h} + \frac{x(x+h-x)}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \sqrt{x+h} + \frac{x}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\ &\rightarrow \sqrt{x} + \frac{x}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}, \quad h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

ty  $\sqrt{x}$  är kontinuerlig för  $x > 0$ . Detta visar att  $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$  för  $x > 0$ .

**Anmärkning:** Konjugatförlängning direkt (alltså utan att först dela upp i två termer) funkar också och ger något kortare räkningar.

6c) Sätt  $f(x) = \tan x$ . Enligt medelvärdessatsen finns ett tal  $\xi$  mellan  $x$  och  $y$  sådant att

$$\tan x - \tan y = f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y) = \frac{1}{\cos^2 \xi}(x - y).$$

Ta belopp av båda led och notera att  $-\frac{\pi}{4} \leq \xi \leq \frac{\pi}{4}$  (ty  $\xi$  mellan  $x$  och  $y$ ) så att  $\cos \xi \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \xi} \leq 2$ . Detta ger att  $|\tan x - \tan y| = \frac{1}{\cos^2 \xi}|x - y| \leq 2|x - y|$  vilket skulle visas.

**Svar:** (a) Se kursboken eller föreläsningsanteckningarna. (b) Se ovan. (c) Se ovan.

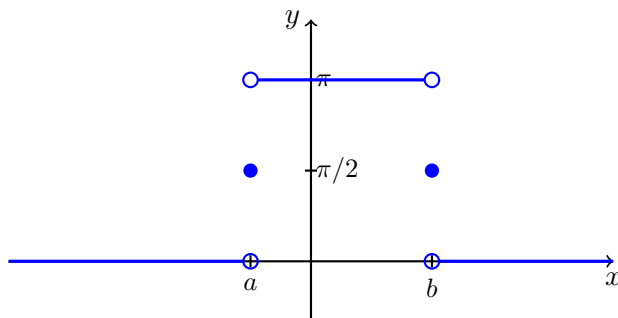
7) Variabelbytet  $y = \frac{x - t}{\varepsilon}$  så att  $dt = -\varepsilon dy$  ger att

$$\int_a^b \frac{\varepsilon}{(x - t)^2 + \varepsilon^2} dt = \frac{1}{\varepsilon} \int_a^b \frac{dt}{\left(\frac{x-t}{\varepsilon}\right)^2 + 1} = \int_{\frac{x-b}{\varepsilon}}^{\frac{x-a}{\varepsilon}} \frac{dy}{y^2 + 1} = \arctan \frac{x-a}{\varepsilon} - \arctan \frac{x-b}{\varepsilon}.$$

Observera att  $\arctan \frac{x-a}{\varepsilon} \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  om  $x > a$  och att  $\arctan \frac{x-a}{\varepsilon} \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  om  $x < a$ . Om  $x = a$  är förstås  $\arctan \frac{x-a}{\varepsilon} = 0$  för alla  $\varepsilon > 0$  så  $\arctan \frac{x-a}{\varepsilon} \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Ge-

nom att hantera andra termen på liknande sätt får vi att  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } x < a \text{ eller } x > b \\ \pi/2 & \text{om } x = a \text{ eller } x = b \\ \pi & \text{om } a < x < b \end{cases}.$

Detta ger grafen



**Svar:** Se ovan.