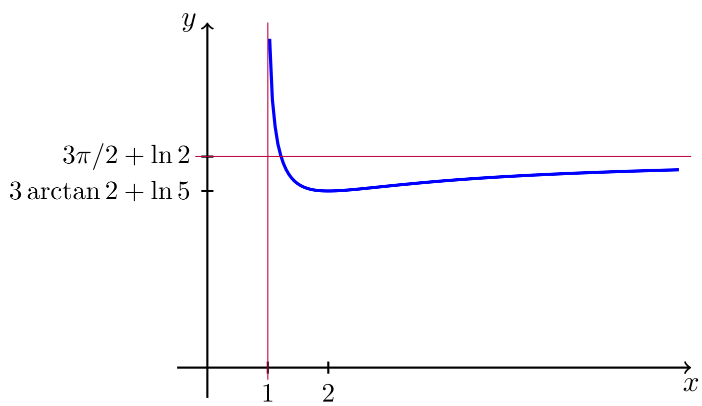
LINKÖPINGS UNIVERSITET — TATA41
Matematiska institutionen — TEN1

Lösningsskisser för TATA41 250609

1) f är definierad då $x>1$. Standardräkningar (Gör dessa!) ger $f'(x) = \dfrac{3(x-2)(x+1)}{(x^2+1)(2x+1)(x-1)}$. Sätt $g(x) = \dfrac{3(x+1)}{(x^2+1)(2x+1)(x-1)}$. Då är $g(x)>0$ i D_f och $f'(x) = (x-2)g(x)$. Detta ger teckentabellen:

x	1		2	
$g(x)$		$+$		$+$
$x-2$		$-$	0	$+$
$f'(x)$	ej def.	$-$	0	$+$
$f(x)$	ej def.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Vi ser att $f(x) = 3\arctan x + \ln\left(\dfrac{2+1/x}{1-1/x}\right) \to \dfrac{3\pi}{2} + \ln 2\,,\ x\to\infty$ och $f(x)\to\infty\,,\ x\to 1^+$ (ty $\ln(x-1)\to-\infty$ och övriga termer har ändliga gränsvärden). Vidare är $f(2) = 3\arctan 2 + \ln 5$. Detta ger grafen



Svar: För graf, se ovan. f har en lokal minimipunkt i $x=2$ (med det lokala minimivärdet $f(2) = 3\arctan 2 + \ln 5$). Lokala maximipunkter saknas. Linjen $x=1$ är lodrät asymptot och linjen $y = \dfrac{3\pi}{2} + \ln 2$ är vågrät asymptot då $x\to\infty$.

2a) Konjugatförlängning samt att $\sqrt{x^2} = x$ då $x>0$ ger

$$\frac{1}{x-\sqrt{x^2+3x}} = \frac{x+\sqrt{x^2+3x}}{x^2-(x^2+3x)} = -\frac{1}{3}\left(1+\sqrt{1+\frac{3}{x}}\right) \to -\frac{2}{3}\,,\ x\to\infty.$$

2b) $$\lim_{x\to-2}\frac{2x^3+3x^2-2x}{x^2-4} = \lim_{x\to-2}\frac{2x\left((x+3/4)^2-25/16\right)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x\to-2}\frac{x(2x-1)}{x-2} = -\frac{5}{2}.$$

2c) $\dfrac{x-1}{\sin(1-x^2)} = \dfrac{x-1}{\frac{\sin(1-x^2)}{1-x^2}(1-x)(1+x)} = -\dfrac{1}{\frac{\sin(1-x^2)}{1-x^2}(1+x)} \to -\dfrac{1}{1(1+1)} = -\dfrac{1}{2}$, $x \to 1$ enligt ett standardgränsvärde, ty $1-x^2 \to 0$, $x \to 1$.

Svar: (a) $-\dfrac{2}{3}$ (b) $-\dfrac{5}{2}$ (c) $-\dfrac{1}{2}$.

3a) Dubblering av vinkeln ger

$$\int_0^{\pi/4} \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} (1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi-2}{8}.$$

3b) Polynomdivision (genomför denna!) ger (C är en godtycklig konstant)

$$\int \frac{x^3-x^2-x-1}{x^2+1}\,dx = \int \left(x-1-\frac{2x}{x^2+1}\right)dx = \frac{x^2}{2} - x - \ln(x^2+1) + C.$$

3c) Bytet $t = x^3 - 7 \Rightarrow dt = 3x^2\,dx \Leftrightarrow x^2\,dx = \dfrac{1}{3}\,dt$ ger

$$\int_2^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^3-7}}\,dx = \int_1^{20} \frac{dt}{3\sqrt{t}} = \left[\frac{2}{3}\sqrt{t}\right]_1^{20} = \frac{4\sqrt{5}-2}{3}.$$

Svar: (a) $\dfrac{\pi-2}{8}$ (b) $\dfrac{x^2}{2} - x - \ln(x^2+1) + C$ (c) $\dfrac{4\sqrt{5}-2}{3}$.

4) Integralen är bara generaliserad i ∞. Partialintegration följt av partialbråksuppdelning ger

$$\begin{aligned}\int_{1/2}^{a} \frac{\arctan 2x}{x^2}\,dx &= \left[-\frac{\arctan 2x}{x}\right]_{1/2}^{a} + \int_{1/2}^{a}\left(\frac{2}{x(1+4x^2)}\right)dx = \frac{\pi}{2} - \frac{\arctan 2a}{a} + \int_{1/2}^{a}\left(\frac{2}{x} - \frac{8x}{1+4x^2}\right)dx \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\arctan 2a}{a} + \left[2\ln|x| - \ln|1+4x^2|\right]_{1/2}^{a} = \frac{\pi}{2} - \frac{\arctan 2a}{a} - \left[\ln\left(4+\frac{1}{x^2}\right)\right]_{1/2}^{a} \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\arctan 2a}{a} - \ln\left(4+\frac{1}{a^2}\right) + \ln 8 \to \frac{\pi}{2} - \ln 4 + \ln 8 = \frac{\pi}{2} + \ln 2,\ a \to \infty,\end{aligned}$$

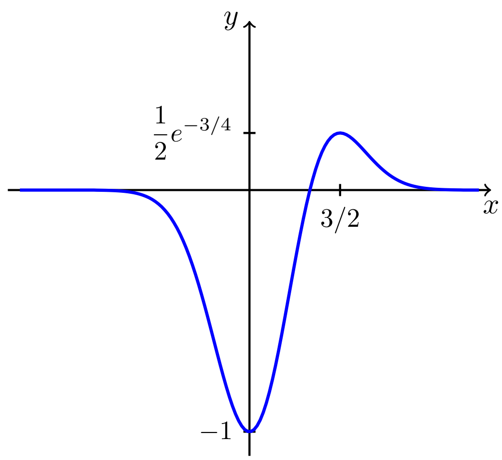
ty $\arctan a$ är begränsad. Detta visar att $\displaystyle\int_{1/2}^{\infty} \frac{\arctan 2x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} + \ln 2$ och är därmed konvergent.

Svar: $\displaystyle\int_{1/2}^{\infty} \frac{\arctan 2x}{x^2}\,dx$ är konvergent och $\displaystyle\int_{1/2}^{\infty} \frac{\arctan 2x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} + \ln 2$.

5) f är definierad för $x \in \mathbf{R}$. Standardräkningar (Gör!) ger $f'(x) = x(3-2x)e^{x-x^2}$. Teckentabell:

x		0		$3/2$	
e^{x-x^2}	$+$		$+$		$+$
$3-2x$	$+$		$+$	0	$-$
x	$-$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

Vi ser att $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{e^{x^2 - x}} \cdot \dfrac{1}{x} \to 0\,,\ x \to \pm\infty$ enligt ett standardgränsvärde (observera att $x^2 - x = x(x-1) \to \infty\,,\ x \to \pm\infty$). Vidare är $f(3/2) = \dfrac{1}{2}e^{-3/4}$ och $f(0) = -1$. Detta ger grafen



Direkt avläsning i grafen ger att olikheten $f(x) < k$ gäller för alla $x \in \mathbf{R}$ precis då $k > \dfrac{1}{2}e^{-3/4}$.

Svar: $k > \dfrac{1}{2}e^{-3/4}$.

6a) **Svar:** $V_f =]-\infty, 0]$ (ty $0 < \sin x \leq 1$ om $x \in D_f$).

6b) **Svar:** $y = 0$ är vågrät asymptot både då $x \to \infty$ och $x \to -\infty$. Lodräta asymptoter saknas (observera att $\arctan \dfrac{1}{x} \to \pm\dfrac{\pi}{2}\,,\ x \to 0^{\pm}$).

6c) **Svar:** 10 (ty $\lfloor x \rfloor$ är en trappfunktion med värden 0, 1, 2, 3, 4 på $]0,1[$, $]1,2[$, $]2,3[$, $]3,4[$ resp. $]4,5[$, använd Definition 6.1 på s 275-276).

7a) Variabelbytet $s = t - 1$ ger, för godtyckligt n, att

$$\int_{n+1}^{n+2} \sin(\pi t) \ln t \, dt = -\int_{n}^{n+1} \sin(\pi s) \ln(s+1)\, ds = -\int_{n}^{n+1} \sin(\pi t) \ln(t+1)\, dt,$$

där sista likheten följer av att integralens värde naturligtvis inte kan bero på vad vi kallat integrationsvariabeln. Det gäller alltså att $\left|\displaystyle\int_{n+1}^{n+2} \sin(\pi t) \ln t \, dt\right| = \left|\displaystyle\int_{n}^{n+1} \sin(\pi t) \ln(t+1)\, dt\right|$.

Antag att n är jämnt, så att $\sin(\pi t) > 0$ på $]n, n+1[$. Då ln är strängt växande är $\ln t < \ln(t+1)$, varför $\displaystyle\int_{n}^{n+1} \sin(\pi t) \ln t \, dt < \int_{n}^{n+1} \sin(\pi t) \ln(t+1)\, dt$ (att olikheten blir sträng följer av att båda integranderna är kontinuerliga på $[n, n+1]$).

Om n är udda ger samma resonemang att $\displaystyle\int_{n}^{n+1} \sin(\pi t) \ln t \, dt > \int_{n}^{n+1} \sin(\pi t) \ln(t+1)\, dt$, där båda leden är negativa. I båda dessa fall gäller alltså att $\left|\displaystyle\int_{n}^{n+1} \sin(\pi t) \ln t \, dt\right| < \left|\displaystyle\int_{n}^{n+1} \sin(\pi t) \ln(t+1)\, dt\right|$

Kombinera dessa observationer så fås

$$\left|\int_{n+1}^{n+2} \sin(\pi t)\ln t\,dt\right| = \left|\int_{n}^{n+1} \sin(\pi t)\ln(t+1)\,dt\right| > \left|\int_{n}^{n+1} \sin(\pi t)\ln t\,dt\right|,$$

vilket skulle visas.

7b) Enligt analysens huvudsats är f deriverbar och därmed också kontinuerlig för $x > 1$. Vidare är $f(2) = \int_1^2 \sin(\pi t)\ln t\,dt < 0$ ty integranden är < 0 för $1 < t < 2$. Dessutom gäller att

$$f(3) = \int_1^3 \sin(\pi t)\ln t\,dt = \int_1^2 \sin(\pi t)\ln t\,dt + \int_2^3 \sin(\pi t)\ln t\,dt,$$

och här är första termen < 0 medan andra termen är > 0, så tecknet på $f(3)$ avgörs av vilken av termerna som har störst absolutbelopp.

Men olikheten från 7a) med $n = 1$ säger att $\left|\int_2^3 \sin(\pi t)\ln t\,dt\right| > \left|\int_1^2 \sin(\pi t)\ln t\,dt\right|$ vilket ger att $f(3) > 0$. Enligt satsen om mellanliggande värde har därmed f minst ett nollställe i intervallet $]2,3[$ och beviset är klart.

Anm: Ett nästan identiskt resonemang visar att f har minst ett nollställe i varje intervall av formen $]k, k+1[$, där $k = 2, 3, \ldots$. Med lite extra arbete går det också att visa (hur?) att f har *exakt* ett nollställe i varje sådant intervall.

Svar: Se ovan.