Lösningsskisser för TATA41 250826

1a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2x^2)}{x^4+3x^2} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2x^2)}{2x^2} \cdot \dfrac{2}{x^2+3} = 1 \cdot \dfrac{2}{0+3} = \dfrac{2}{3}$ (standardgränsvärde).

1b) $\lim_{x\to 1} \dfrac{e^x - e}{x-1} = /t = x-1/ = \lim_{t\to 0} \dfrac{e^{t+1}-e}{t} = \lim_{t\to 0} e \cdot \dfrac{e^t - 1}{t} = e \cdot 1 = e$ (standardgränsvärde).

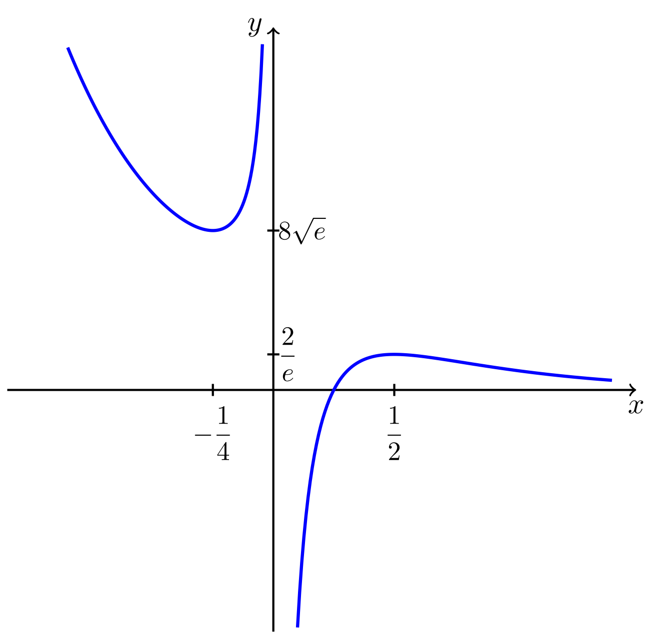
1c) $\dfrac{\ln(2^{3x}+3^{2x})}{\ln(2^{4x}+4^{2x})} = \dfrac{\ln(8^x+9^x)}{\ln(2\cdot 2^{4x})} = \dfrac{x\ln 9 + \ln\left(1+\left(\frac{8}{9}\right)^x\right)}{(4x+1)\ln 2} = \dfrac{2\ln 3 + \frac{1}{x}\ln\left(1+\left(\frac{8}{9}\right)^x\right)}{\left(4+\frac{1}{x}\right)\ln 2} \to \dfrac{\ln 3}{2\ln 2},\ x\to\infty.$

Svar: (a) $\dfrac{2}{3}$ (b) e (c) $\dfrac{\ln 3}{2\ln 2}$.

2) f är definierad då $x \neq 0$. Standardräkningar (Gör dessa!) ger $f'(x) = e^{-2x}\dfrac{(1-2x)(4x+1)}{x^2}$.
Teckentabell:

x		$-1/4$		0		$1/2$	
e^{-2x}	$+$		$+$		$+$		$+$
$1-2x$	$+$		$+$		$+$	0	$-$
$4x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
x^2	$+$		$+$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	ej def.	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	ej def.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

Vi ser att $f(x) \to \mp\infty,\ x \to 0^{\pm},\ f(x) \to (4+0)\cdot 0 = 0,\ x\to\infty$ och $f(x)\to\infty,\ x\to-\infty$.
Vidare är $f(-1/4) = 8\sqrt{e}$ och $f(1/2) = 2/e$. Detta ger grafen



Svar: För graf, se ovan. f har en lokal maximipunkt i $x = 1/2$ (med det lokala maximivärdet $f(1/2) = 2/e$) och en lokal minimipunkt i $x = -1/4$ (med det lokala minimivärdet $f(-1/4) = 8\sqrt{e}$). Linjen $x = 0$ är lodrät asymptot och linjen $y = 0$ är vågrät asymptot då $x \to \infty$.

3a) En partialintegration ger

$$\int_0^2 xe^{2x}\,dx = \left[\frac{x}{2}e^{2x}\right]_0^2 - \frac{1}{2}\int_0^2 e^{2x}\,dx = e^4 - \frac{1}{4}\left[e^{2x}\right]_0^2 = \frac{1}{4}\left(3e^4+1\right).$$

3b) Igenkänning av inre derivata samt en standardprimitiv ger (C är en godtycklig konstant)

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{1/2}\cdot(-2x)\,dx = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2} + C.$$

Anmärkning: Gör bytet $t = 1 - x^2$ om du har svårt att följa vad som hände i sista steget.

3c) Bytet $t = \sin x$, $dt = \cos x\,dx$ samt en polynomdivision ger (C är en godtycklig konstant)

$$\int \frac{\sin 2x}{1+\sin x}\,dx = \int \frac{2\sin x\cos x}{1+\sin x}\,dx = \int \frac{2t}{1+t}\,dt = \int \left(2 - \frac{2}{1+t}\right)dt = 2t - 2\ln|1+t| + C$$
$$= 2\sin x - 2\ln(1+\sin x) + C.$$

Svar: (a) $\frac{1}{4}\left(3e^4+1\right)$ (b) $-\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}+C$ (c) $2\sin x - 2\ln(1+\sin x)+C$.

4a) Observera att $x^4 + 2x^3 + 5x^2 = x^2((x+1)^2+4)$ vilket inte går att faktorisera ytterligare, så partialbråksuppdelning ger ($F(x) =$ sökt primitiv)

$$F(x) = \int \left(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+2x+5}\right)dx = -\frac{2}{x} + \ln|x| - \frac{1}{2}\int\left(\frac{2x+2}{x^2+2x+5} - \frac{1}{2}\frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}\right)dx$$
$$= -\frac{2}{x} + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) + \frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2} + C,$$

där C är en godtycklig konstant och där vi har använt att $x^2+2x+5 = (x+1)^2+4 > 0$.

4b) Insättningsformeln ger

$$\begin{aligned}\int_1^a \frac{4x^2+9x+10}{x^4+2x^3+5x^2}\,dx &= -\frac{2}{a} + \ln|a| - \frac{1}{2}\ln(a^2+2a+5) + \frac{1}{2}\arctan\frac{a+1}{2} + 2 + \frac{1}{2}\ln 8 - \frac{\pi}{8}\\ &= -\frac{2}{a} - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{2}{a}+\frac{5}{a^2}\right) + \frac{1}{2}\arctan\frac{a+1}{2} + 2 + \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{8}\\ &\to -0 - 0 + \frac{\pi}{4} + 2 + \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{8} = 2 + \frac{3}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{8},\ a\to\infty,\end{aligned}$$

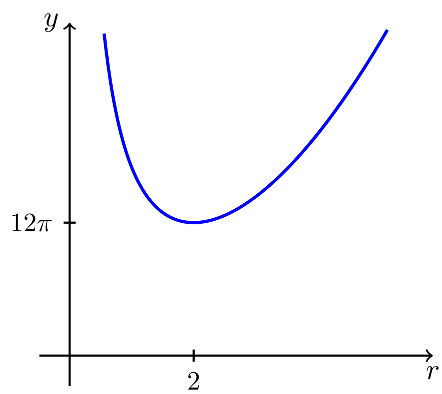
vilket visar att $\int_1^\infty \frac{4x^2+9x+10}{x^4+2x^3+5x^2}\,dx$ är konvergent och $\int_1^\infty \frac{4x^2+9x+10}{x^4+2x^3+5x^2}\,dx = 2+\frac{3}{2}\ln 2+\frac{\pi}{8}$.

Svar: (a) $-\frac{2}{x} + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) + \frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2} + C$ (b) $2+\frac{3}{2}\ln 2+\frac{\pi}{8}$.

5) Låt $r > 0$ vara cylinderns radie och låt $h > 0$ vara cylinderns höjd. Då cylindern rymmer 8π är $\pi r^2 h = 8\pi$. Vi ska minimera arean $A = 2\pi r h + \pi r^2 = \dfrac{16\pi}{r} + \pi r^2 =: f(r)$ för $r > 0$. Derivering ger $f'(r) = 2\pi \dfrac{r^3 - 8}{r^2}$ och då täljaren är strängt växande och $= 0$ då $r = 2$ får vi teckentabellen

r	0		2	
$2\pi(r^3 - 8)$		$-$	0	$+$
r^2		$+$		$+$
$f'(r)$	ej def.	$-$	0	$+$
$f(r)$	ej def.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Vi ser att $f(r) \to \infty$ både då $r \to 0^+$ och då $r \to \infty$. Vidare är $f(2) = 12\pi$. Grafen $y = f(r)$ får därför följande utseende:

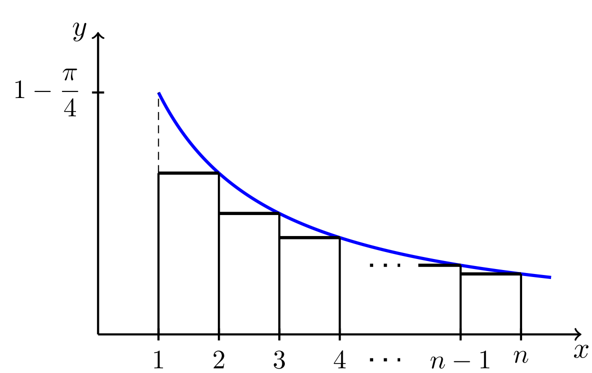


f:s minsta värde är alltså $f(2) = 12\pi$, d v s minimala arean blir 12π.

Svar: 12π.

Alternativ: Det går också att lösa uppgiften utan att göra teckentabell. Då $r^3 - 8$ är strängt växande och $= 0$ för $r = 2$ följer att $f'(r) < 0$ för $0 < r < 2$ och $f'(r) > 0$ för $r > 2$. Därmed är f strängt avtagande på $]0, 2]$ och strängt växande på $[2, \infty[$ vilket ger att $f(r) > f(2)$ för alla $0 < r \neq 2$. $f(2) = 12\pi$ är därmed f:s minsta värde.

6) Sätt $f(x) = \dfrac{1}{x} - \arctan \dfrac{1}{x}$ för $x \geq 1 \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{1}{x^2(x^2+1)} < 0$ för $x \geq 1$ så f är strängt avtagande på $[1, \infty[$. Då $f(x) \to 0 - 0 = 0\,,\ x \to \infty$ och $f(1) = 1 - \dfrac{\pi}{4}$ kan vi rita f:s graf (Gör detta!!!):



Alltså är $\left(\frac{1}{2}-\arctan\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\arctan\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\arctan\frac{1}{n}\right)=\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k}-\arctan\frac{1}{k}\right)$ en undersumma till $\int_1^n\left(\frac{1}{x}-\arctan\frac{1}{x}\right)\,dx$, så att $\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k}-\arctan\frac{1}{k}\right)<\int_1^n\left(\frac{1}{x}-\arctan\frac{1}{x}\right)\,dx$. Detta ger

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\arctan\frac{1}{k}\right)&=1-\frac{\pi}{4}+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k}-\arctan\frac{1}{k}\right)<1-\frac{\pi}{4}+\int_1^n\left(\frac{1}{x}-\arctan\frac{1}{x}\right)\,dx\\&=1-\frac{\pi}{4}+\left[\ln|x|-x\arctan\frac{1}{x}\right]_1^n+\int_1^n\frac{x}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\,dx\\&=1+\ln n-n\arctan\frac{1}{n}-\int_1^n\frac{x}{1+x^2}\,dx=1-n\arctan\frac{1}{n}+\ln n-\left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_1^n\\&=1-n\arctan\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)+\frac{1}{2}\ln 2<1-0-0+\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{3}{2},\end{aligned}$$

vilket skulle visas.

Svar: Se ovan.

7a) Då f enligt förutsättning är deriverbar i 0 är f också kontinuerlig i 0 och då $\ln x\to\ln 1=0$, $x\to 1$ (ty även ln är kontinuerlig) följer att $f(\ln x)\to f(0)$, $x\to 1$ så $\lim_{x\to 1}(f(\ln x)-f(0))=f(0)-f(0)=0$.

7b) Notera att $\frac{f(\ln x)-f(0)}{x-1}=\frac{f(\ln x)-f(0)}{\ln x}\cdot\frac{\ln x}{x-1}$. Nu är

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(\ln x)-f(0)}{\ln x}=/h=\ln x/=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=f'(0)=1,$$

enligt definitionen av derivata. Dessutom är $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=/t=x-1/=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$ enligt ett standardgränsvärde.

Räknelagar för gränsvärden ger nu att $\lim_{x\to 1}\frac{f(\ln x)-f(0)}{x-1}=1\cdot 1=1$.

7c) Sätt $h(x)=\ln x$ och $g(x)=f(\ln x)=f(h(x))$. Då f är deriverbar i 1 är g deriverbar i $x=e$ enligt kedjeregeln (ty $h(e)=1$) och $g'(e)=f'(1)\cdot h'(e)=2/e$. Vidare är

$$\lim_{x\to e}\frac{f(\ln x)-f(1)}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{g(x)-g(e)}{x-e}=g'(e)=\frac{2}{e},$$

enligt ovan.

Anm: Det går också utmärkt att lösa 7b) med samma idé som i 7c) och det går också att lösa 7c) med idén från 7b).

Svar: (a) 0 (b) 1 (c) $2/e$.