

Lösningsskisser för TATA41 260114

$$1a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt{1+2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+3x - (1+2x)}{x(\sqrt{1+3x} + \sqrt{1+2x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+3x} + \sqrt{1+2x}} = \frac{1}{2}.$$

$$1b) \frac{\sin(x^2)}{x - \ln x} = \left(\frac{1}{x} \cdot \sin(x^2) \right) \cdot \frac{1}{1 - \frac{\ln x}{x}}. \text{ Då } \sin(x^2) \text{ är begränsad, } 1/x \rightarrow 0 \text{ går faktorn inom paren-}$$

tes mot 0 enligt Sats 3.1. Andra faktorn går mot 1 ty $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$ (standard) så $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x^2)}{x - \ln x} = 0$.

$$1c) \frac{e^x - e}{x^3 - x} = \frac{e^x - e}{(x-1)x(x+1)} = /t = x-1/ = \frac{e^{t+1} - e}{t(t+1)(t+2)} = \frac{e}{(t+1)(t+2)} \cdot \frac{e^t - 1}{t} \rightarrow \frac{e}{2} \text{ då } t \rightarrow 0, \text{ d v s då } x \rightarrow 1 \text{ enligt ett standardgränsvärde.}$$

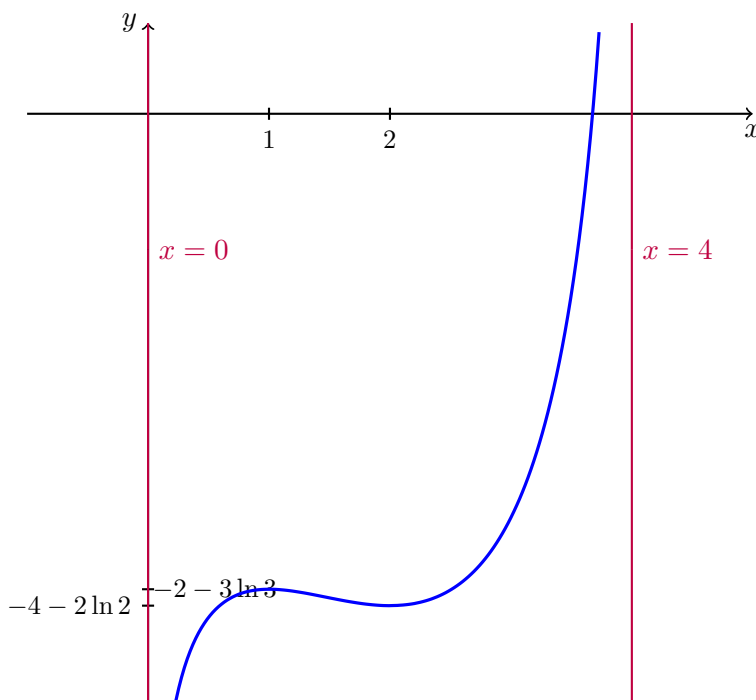
Svar: (a) $\frac{1}{2}$ (b) 0 (c) $\frac{e}{2}$.

2) f är definierad då $0 < x < 4$. Standardräkningar (Gör dessa!) ger $f'(x) = \frac{2(x-1)(x-2)}{x(4-x)}$.

Teckentabell:

x	0		1		2		4	
$2(x-1)$	-		0		+		+	
$x-2$	-				-		0	
$4-x$	+				+		+	
x	0		+		+		+	
$f'(x)$	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	
	+		0		+		+	
	ej def.		+		0		-	
	+		0		-		0	

Då $\ln x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow 0^+$ ser vi att $f(x) \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow 0^+$, $f(x) \rightarrow \infty$, $x \rightarrow 4^-$. Vidare är $f(1) = -2 - 3 \ln 3$ och $f(2) = -4 - 2 \ln 2$. Detta ger grafen



Svar: För graf, se ovan. f har en lokal maximipunkt i $x = 1$ (med det lokala maximivärdet $f(1) = -2 - 3 \ln 3$) och en lokal minimipunkt i $x = 2$ (med det lokala minimivärdet $f(2) = -4 - 2 \ln 2$). Linjerna $x = 0$ och $x = 4$ är lodräta asymptoter. Vågräta asymptoter saknas.

3a) Partialbråksuppdelning ger (C är en godtycklig konstant)

$$\int \frac{1+x-x^2}{x(x+1)^2} dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx = \ln|x| - 2 \ln|x+1| - \frac{1}{x+1} + C.$$

3b) Bytet $t = \ln x$, $dt = (1/x) dx$ ger

$$\int_1^e \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx = \int_0^1 \sqrt{1+t} dt = \left[\frac{2}{3} (1+t)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{4\sqrt{2}-2}{3}.$$

3c) En partialintegration ger (C är en godtycklig konstant)

$$\int \arctan 2x dx = x \arctan 2x - \int \frac{2x}{1+4x^2} dx = x \arctan 2x - \frac{1}{4} \ln(1+4x^2) + C.$$

Svar: (a) $\ln|x| - 2 \ln|x+1| - \frac{1}{x+1} + C$ (b) $\frac{4\sqrt{2}-2}{3}$ (c) $x \arctan 2x - \frac{1}{4} \ln(1+4x^2) + C$.

4a) Integralen är generaliserad både i 0 och ∞ . $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+3)}$ och $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+3)}$ måste alltså undersökas var för sig. Bytet $t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2$, $dx = 2t dt$ samt partialbråksuppdelning ger

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+3)} &= \int_{\sqrt{\varepsilon}}^1 \frac{2 dt}{t^2+3} = \frac{2}{3} \int_{\sqrt{\varepsilon}}^1 \frac{dt}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\arctan \frac{t}{\sqrt{3}} \right]_{\sqrt{\varepsilon}}^1 \\ &= \frac{\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}} \rightarrow \frac{\pi}{3\sqrt{3}}, \quad \varepsilon \rightarrow 0^+, \end{aligned}$$

vilket visar att $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+3)}$ är konvergent med $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+3)} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. På samma sätt fås

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+3)} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_1^\omega \frac{dx}{\sqrt{x}(x+3)} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \sqrt{\frac{\omega}{3}} - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}},$$

vilket visar att $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+3)}$ är konvergent och att

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+3)} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+3)} + \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+3)} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

4b) $\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^3} = \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_\varepsilon^1 = \frac{1}{2\varepsilon^2} - \frac{1}{2} \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0^+$ så $\int_0^1 \frac{dx}{x^3}$, och därmed även $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^3}$, är divergent.

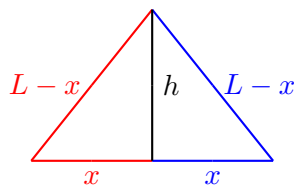
Svar: (a) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ (b) Divergent.

5a) f är självklart kontinuerlig överallt där den är definierad utom möjligtvis i $x = 0$. Om f är kontinuerlig också i 0 så måste $a = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{\sin t}{t}} = 1$ enligt ett standardgränsvärde. Dessutom måste $1 = a = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} b \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi b}{2}$ vilket ger att $b = -\frac{2}{\pi}$. Med dessa värden på a och b är $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 = f(0)$ så f blir verkligen kontinuerlig i 0 för dessa värden på a och b .

5b) Observera att $g(1) = e$, $g'(x) = (x+1)e^x$ och att förutsättningarna i satsen om derivering av invers funktion är uppfyllda. Detta ger $(g^{-1})'(e) = \frac{1}{g'(1)} = \frac{1}{2e}$.

Svar: (a) $a = 1$, $b = -\frac{2}{\pi}$ (b) $\frac{1}{2e}$.

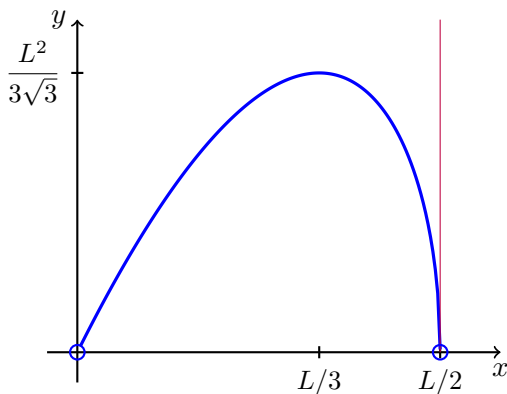
6) Vi ritar först en figur och inför beteckningar.



Pythagoras sats ger $h = \sqrt{L^2 - 2Lx}$. Vi ska maximera arean $A(x) = xh = x\sqrt{L^2 - 2Lx}$ för $x > 0$ och $L - x > x$ (ty hypotenusan i en rätvinklig triangel är alltid längre än båda kateterna), d v s $0 < x < \frac{L}{2}$. Derivering ger $A'(x) = \sqrt{L^2 - 2Lx} - \frac{Lx}{\sqrt{L^2 - 2Lx}} = \frac{L^2 - 3Lx}{\sqrt{L^2 - 2Lx}}$.

Vi ser att $A'(x) > 0$ då $L^2 - 3Lx > 0$, d v s då $0 < x < L/3$, $A'(x) = 0$ då $x = L/3$ och $A'(x) < 0$ då $L/3 < x < L/2$. $A(x)$ är alltså strängt växande på $]0, L/3]$ och strängt avtagande på $[L/3, L/2[$ (det går förstås också att göra en teckentabell för att se detta!).

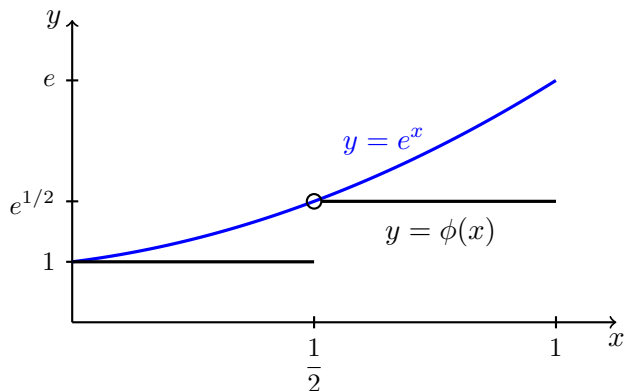
Vidare är $\lim_{x \rightarrow 0} A(x) = \lim_{x \rightarrow L/2} A(x) = 0$ och $A(L/3) = \frac{L^2}{3\sqrt{3}}$. Grafen $y = A(x)$ blir därför



Areans största värde är alltså $A(L/3) = \frac{L^2}{3\sqrt{3}}$ och det antas då $x = L/3$, d v s då alla sidor i triangeln har längd $2L/3$. Triangeln med störst area är alltså liksidig, vilket skulle visas.

Svar: Se ovan.

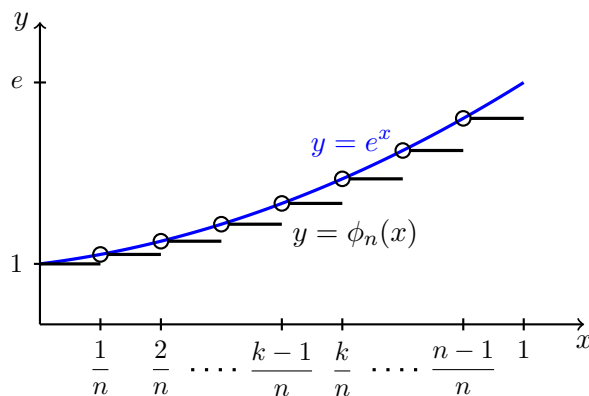
7a) Sätt $\phi(x) = 1$ för $0 \leq x \leq 1/2$ och $\phi(x) = e^{1/2}$ för $1/2 < x \leq 1$.



Då är ϕ en undertrappa till $y = e^x$ på $[0, 1]$ ty e^x är strängt växande. Enligt definitionen av integral av trappfunktion är $\int_0^1 \phi(x) dx = 1 \cdot \left(\frac{1}{2} - 0\right) + e^{1/2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1 + e^{1/2}}{2} > \frac{1 + \frac{3}{2}}{2} = \frac{5}{4}$,

ty $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} < e$.

7b) Dela upp intervallet $[0, 1]$ i n st lika långa delintervall. Definiera sedan $\phi_n(x)$ genom att sätta $\phi_n(0) = 1$ och $\phi_n(x) = e^{\frac{k-1}{n}}$ om $\frac{k-1}{n} < x \leq \frac{k}{n}$ för $k = 1, 2, \dots, n$. ϕ_n :s värde på intervall k är alltså hela tiden e^x :s värde i den vänstra ändpunkten i detta intervall och då e^x är strängt växande följer det att ϕ_n är en undertrappa till e^x på $[0, 1]$.



Definitionen av integral av trappfunktion ger sedan

$$\begin{aligned} \int_0^1 \phi_n(x) dx &= \sum_{k=1}^n e^{\frac{k-1}{n}} \left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right) = \frac{e^{-1/n}}{n} \sum_{k=1}^n e^{k/n} = \text{/geometrisk summa/} = \frac{e^{-1/n}}{n} e^{1/n} \frac{(e^{1/n})^n - 1}{e^{1/n} - 1} \\ &= \frac{e - 1}{n} \cdot \frac{1}{e^{1/n} - 1} = \frac{e - 1}{\frac{e^{1/n} - 1}{1/n}} \rightarrow \frac{e - 1}{1} = e - 1 = \int_0^1 e^x dx, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

enligt standardgränsvärdet $\frac{e^x - 1}{x} \rightarrow 1, x \rightarrow 0$. Följden ϕ_n ovan har alltså alla de föreskrivna egenskaperna.

Svar: Se ovan.