

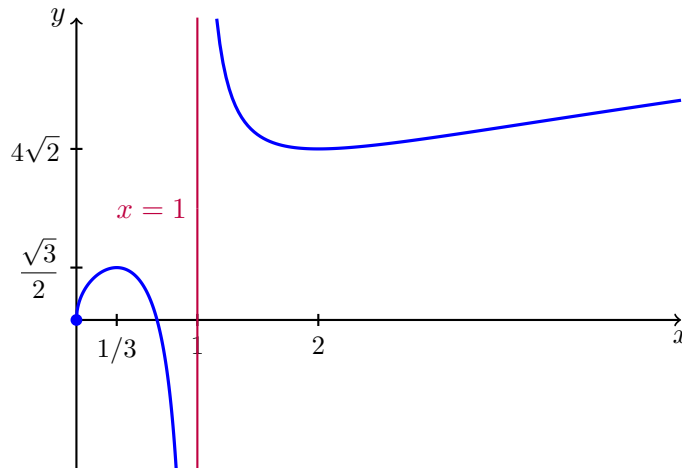
Lösningsskisser för TATA41 260325

1) f är definierad då $0 \leq x \neq 1$. Standardräkningar (Gör dessa!) ger $f'(x) = \frac{(3x-1)(x-2)}{2\sqrt{x}(x-1)^2}$.

Teckentabell:

x	0	1/3	1	2	
$3x-1$	-	0	+	+	+
$x-2$	-	-	-	0	+
$(x-1)^2$	+	+	0	+	+
$2\sqrt{x}$	0	+	+	+	+
$f'(x)$	ej def.	+	0	-	ej def.
$f(x)$	lok. min.	↗	lok. max.	↘	ej def.
					lok. min.
					↗

Vi ser att $f(x) \rightarrow \pm\infty$, $x \rightarrow 1^\pm$ och med omskrivningen $f(x) = 3\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{x}}$ får vi att $f(x) \rightarrow \infty$, $x \rightarrow \infty$. Vidare är $f(0) = 0$, $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ och $f(2) = 4\sqrt{2}$. Detta ger grafen



Svar: För graf, se ovan. f har en lokal maximipunkt i $x = 1/3$ (med det lokala maximivärdet $f(1/3) = \sqrt{3}/2$) och lokala minimipunkter i $x = 0$ och $x = 2$ (med de lokala minimivärdena $f(0) = 0$ respektive $f(2) = 4\sqrt{2}$). Linjen $x = 1$ är en lodrät asymptot och vågräta asymptoter saknas.

2a) Faktorisering ger $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 + x - 3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + 2x + 3)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x + 3}{x+1} = 3$.

2b) $\frac{x^2 - x}{\ln(1 + \sin 7x)} = \frac{x-1}{\frac{\ln(1+\sin 7x)}{\sin 7x} \cdot \frac{\sin 7x}{7x} \cdot 7} \rightarrow \frac{0-1}{1 \cdot 1 \cdot 7} = -\frac{1}{7}$, $x \rightarrow 0$ enligt standardgränsvärdena
 $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$ och $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$.

2c) $\frac{x \ln x}{x^x - 1} = \frac{1}{\frac{e^{x \ln x} - 1}{x \ln x}} \rightarrow \frac{1}{1} = 1$, $x \rightarrow 0$ då $x \ln x \rightarrow 0$, $x \rightarrow 0$ och $\frac{e^t - 1}{t} \rightarrow 1$, $t \rightarrow 0$ enligt två av våra standardgränsvärden.

Svar: (a) 3 (b) $-\frac{1}{7}$ (c) 1.

3a) Faktorisering av nämnaren följt av partialbråksuppdelning ger

$$\int_0^1 \frac{dx}{5x - x^2 - 6} = \int_0^1 \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} \right) dx = [\ln|x-2| - \ln|x-3|]_0^1 = \ln 3 - 2 \ln 2 = -\ln \frac{4}{3}.$$

Kontroll: Negativ integrand ger negativt svar. OK!

3b) Bytet $t = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = t^2$, $t \geq 0$, $dx = 2t dt$ följt av en partialintegration ger

$$\int_0^4 \cos \sqrt{x} dx = \int_0^2 2t \cos t dt = [2t \sin t]_0^2 - \int_0^2 2 \sin t dt = 4 \sin 2 - [-2 \cos t]_0^2 = 4 \sin 2 + 2 \cos 2 - 2.$$

3c) Bytet $t = \arctan 2x$, $dt = \frac{2}{1+4x^2} dx$ ger (C är en godtycklig konstant)

$$\int \frac{e^{\arctan 2x}}{4x^2 + 1} dx = \int e^t \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} e^t + C = \frac{1}{2} e^{\arctan 2x} + C.$$

Svar: (a) $\ln 3 - 2 \ln 2$ (b) $4 \sin 2 + 2 \cos 2 - 2$ (c) $\frac{1}{2} e^{\arctan 2x} + C$.

4) Integralen är bara generaliserad i ∞ . Låt $a > 3$ och betrakta

$$\begin{aligned} I &= \int_3^a \frac{4x-4}{(x^2-2x+5)(x+1)} dx = /PBU/ = \int_3^a \left(\frac{x+1}{x^2-2x+5} - \frac{1}{x+1} \right) dx = -[\ln|x+1|]_3^a \\ &+ \frac{1}{4} \int_3^a \frac{x+1}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 1} dx = /t = \frac{x-1}{2}, dx = 2 dt / = 2 \ln 2 - \ln(a+1) + \frac{1}{2} \int_1^{\frac{a-1}{2}} \frac{2t+2}{t^2+1} dt \\ &= 2 \ln 2 - \ln(a+1) + \frac{1}{2} [\ln|t^2+1| + 2 \arctan t]_1^{\frac{a-1}{2}} = 2 \ln 2 - \ln(a+1) + \frac{1}{2} \ln \frac{a^2-2a+5}{4} \\ &+ \arctan \frac{a-1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln \frac{a^2-2a+5}{(a+1)^2} + \arctan \frac{a-1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-\frac{2}{a}+\frac{5}{a^2}}{\left(1+\frac{1}{a}\right)^2} + \arctan \frac{a-1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4}, a \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

$$\text{så } \int_3^\infty \frac{4x-4}{(x^2-2x+5)(x+1)} dx \text{ är konvergent och } \int_3^\infty \frac{4x-4}{(x^2-2x+5)(x+1)} dx = \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4}.$$

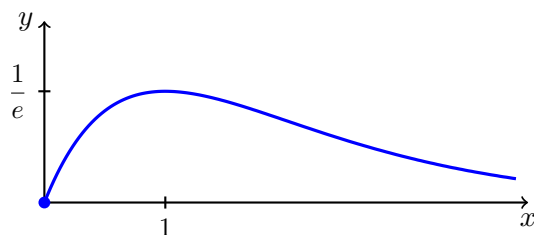
Svar: $\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4}$.

5a) f är definierad då $x \geq 0$ och $f'(x) = (1-x)e^{-x}$.

Teckentabell:

x	0		1	
$1-x$		+	0	-
e^{-x}		+		+
$f'(x)$	ej def.	+	0	-
$f(x)$	lok. min.	↗	lok. max.	↘

Vi ser att $f(x) = \frac{x}{e^x} \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$ enligt ett standardgränsvärde. Vidare är $f(0) = 0$ och $f(1) = \frac{1}{e}$. Detta ger grafen



och i den läser vi av att $V_f = \left[0, \frac{1}{e}\right]$.

5b) Se kursboken eller föreläsninganteckningarna.

5c) Sätt $g(x) = \ln(1+x^2)$. Definitionen av derivata ger då att

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+(x+h)^2) - \ln(1+x^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

Svar: (a) $V_f = \left[0, \frac{1}{e}\right]$ (b) Se kursboken eller föreläsninganteckningarna. (c) $\frac{2x}{1+x^2}$.

6) Vi studerar först fallet $\alpha \neq -1$. För $b > 1$ ger en partialintegration att

$$\begin{aligned} \int_1^b x^\alpha \ln x \, dx &= \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \ln x \right]_1^b - \int_1^b \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{b^{\alpha+1}}{\alpha+1} \ln b - \left[\frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2} \right]_1^b \\ &= \frac{b^{\alpha+1}}{\alpha+1} \left(\ln b - \frac{1}{\alpha+1} \right) + \frac{1}{(\alpha+1)^2}. \end{aligned}$$

Uttrycket inom parentes $\rightarrow \infty$ då $b \rightarrow \infty$ och om $\alpha > -1$ gäller också att $b^{\alpha+1} \rightarrow \infty$, $b \rightarrow \infty$ så $\int_1^\infty x^\alpha \ln x \, dx$ är divergent för $\alpha > -1$. För $\alpha < -1$ är $\gamma := -1 - \alpha > 0$ så då är

$$\int_1^b x^\alpha \ln x \, dx = -\frac{1}{\gamma} \frac{\ln b}{b^\gamma} - \frac{1}{\gamma^2} \frac{1}{b^\gamma} + \frac{1}{\gamma^2} \rightarrow \frac{1}{\gamma^2} = \frac{1}{(\alpha+1)^2}, \quad b \rightarrow \infty,$$

enligt standardgränsvärdet $\frac{\ln b}{b^\gamma} \rightarrow 0$, $b \rightarrow \infty$ om $\gamma > 0$.

För $\alpha < -1$ är alltså $\int_1^{\infty} x^{\alpha} \ln x \, dx$ konvergent och $\int_1^{\infty} x^{\alpha} \ln x \, dx = \frac{1}{(\alpha + 1)^2}$.

Återstår fallet $\alpha = -1$. Då får vi

$$\int_1^b x^{\alpha} \ln x \, dx = \int_1^b \frac{\ln x}{x} \, dx = \left[\frac{1}{2} (\ln x)^2 \right]_1^b = \frac{1}{2} (\ln b)^2 \rightarrow \infty, \quad b \rightarrow \infty,$$

så $\int_1^{\infty} x^{\alpha} \ln x \, dx$ är divergent för $\alpha = -1$.

Svar: För $\alpha < -1$ är $\int_1^{\infty} x^{\alpha} \ln x \, dx = \frac{1}{(\alpha + 1)^2}$ och för $\alpha \geq -1$ är $\int_1^{\infty} x^{\alpha} \ln x \, dx$ divergent.

7a) Givet förutsättningarna, om $a < b$ och $f(a) = f(b)$ så finns ett tal ξ med $a < \xi < b$ sådant att $f'(\xi) = 0$.

7b) Låt $a < b < c$ vara tre olika nollställen till f . Då $f(a) = f(b) (= 0)$ och f är deriverbar överallt följer det av Rolles sats att det finns ett tal ξ_1 med $a < \xi_1 < b$ sådant att $f'(\xi_1) = 0$. Samma resonemang ger att det också finns ett tal ξ_2 med $b < \xi_2 < c$ sådant att $f'(\xi_2) = 0$. Då $\xi_1 < \xi_2$ och $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) (= 0)$ och f' är deriverbar överallt ger Rolles sats en tredje gång, använd på funktionen $g = f'$, att det finns ett tal ξ med $\xi_1 < \xi < \xi_2$ sådant att $f''(\xi) = g'(\xi) = 0$ så f'' har minst ett nollställe, vilket skulle visas.

Svar: (a) Se ovan. (b) Se ovan.