

Tentamen i Envariabelanalys 1

2021-03-27 kl. 14.00-19.00

Penna, radergummi, linjal, passare och gradskiva utan formler på får användas. Inga andra hjälpmedel är tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n - 1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$). Svar finns på kursens hemsida efter helgen.

1. Skissa grafen till funktionen $f(x) = \arctan x + \frac{2-x}{x^2+1}$. Ange alla lodräta och vågräta asymptoter samt lokala extrempunkter.

2. Undersök gränsvärdena

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - 1}{\ln(1+x)} \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1+3x}}{\sqrt{1+4x} - \sqrt{1-5x}} \quad (c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ex^3 - (\sqrt[3]{x})^e}{e^{x^{1/3}}}.$$

3. Beräkna

$$(a) \int \frac{2x^3 - x^2 - 3x - 1}{x^2 + 1} dx \quad (b) \int \cos 2x \sin x dx \quad (c) \int \frac{\ln x \cdot \sin(\ln x)}{x} dx.$$

4. Ange antalet olika lösningar till ekvationen $(x^2 - x) \ln x = \frac{x^2}{2} - x + k$ för alla värden på den reella konstanten k .

5. Beräkna $\int_2^{\infty} \frac{dx}{3x^3 + x^2 - 3x - 1}$ eller visa divergens.

6. Låt $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln |x| + x & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$. Beräkna $f'(x)$ för alla $x \in \mathbf{R}$ för vilka derivatan existerar, med hjälp av definitionen av derivata.

7. Visa att det finns ett reellt tal ξ sådant att $\int_0^3 x^2 f(x) dx = 9f(\xi)$ om man vet att f är kontinuerlig på $[0, 3]$.