

Tentamen i Envariabelanalys 1 2021-03-28 kl. 14.00-19.00

Penna, radergummi, linjal, passare och gradskiva utan formler på får användas. Inga andra hjälpmedel är tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n - 1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$). Svar finns på kursens hemsida efter helgen.

1. Skissa grafen till funktionen $f(x) = \frac{e^{-x^2/6}}{x - 4}$. Ange alla lodräta och vågräta asymptoter samt lokala extrempunkter.

2. Undersök gränsvärdena

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + x^3}{x^5 + e^{3+x}}$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{(e^{2x} - 1) \sin \pi x}$ (c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\sqrt{x} - 1}$.

3. Beräkna

(a) $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$ (b) $\int \arcsin 2x \, dx$ (c) $\int x^2 \ln |x| \, dx$.

4. För vilka $x \in \mathbf{R}$ gäller olikheten $8x - 3 \arctan 2x > 2 \ln(1 + 4x^2)$?

5. Beräkna $\int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{x^3} \, dx$ eller visa divergens.

6. Betrakta kurvan $y = f(x) = x^3$, $x > 0$. Bestäm alla värden y -koordinaten kan anta, i de punkter där en normal till denna kurva skär y -axeln.

7. Låt f vara kontinuerlig på $[0, \infty[$ och antag att $\int_0^{\infty} f(x) \, dx$ är konvergent och $\neq 0$.

Sätt $a_n = \int_0^{\infty} f(nx) \, dx$ för $n = 1, 2, \dots$ och undersök $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 \arcsin(a_n + \frac{1}{2}) - \pi}{a_n}$.