LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen

TATA41
TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 1

2021-03-28 kl. 08.00-13.00

Penna, radergummi, linjal, passare och gradskiva utan formler på får användas. Inga andra hjälpmedel är tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$). Svar finns på kursens hemsida efter helgen.

1. Skissa grafen till funktionen $f(x) = \ln(1 + x^4) - 3\ln|x| + \arctan x^2$. Ange alla lodräta och vågräta asymptoter samt lokala extrempunkter.

2. Undersök gränsvärdena

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(x - \sqrt{x^2 + 4x}\right)$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1 + 3x)^{\frac{1}{4x}}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to e}\frac{1 - \ln x}{x^2 - e^2}$.

3. Beräkna

   (a) $\displaystyle\int (t^2 + t)e^{2t}\,dt$ (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 2x - x^2}}$ (c) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2 - 1}\,dx$.

4. Beräkna $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\infty} \frac{dx}{e^{2x} - e^x + 4 - 4e^{-x}}$ eller visa divergens.

5a. Definiera vad det betyder att f är deriverbar i en punkt a.

5b. Derivera $g_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ och $g_2(x) = \ln|x|$ med hjälp av definitionen av derivata.

6. Visa att $x\arctan x \geq \ln(1 + x^2)$ för alla reella x.

7. f är kontinuerlig på $[0, \infty[$ och $\displaystyle\lim_{t\to\infty} f(t) = A$. Visa att $g(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} (f(t) - f(t + x))\,dt$ är konvergent för $x > 0$ samt visa att $g'(x)$ existerar för $x > 0$.