LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen

TATA41
TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 1

2022-06-07 kl. 14.00-19.00

Penna, radergummi, linjal, passare och gradskiva utan formler på får användas. Inga andra hjälpmedel är tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$). Svar publiceras på kursens hemsida senast dagen efter tentan.

1. Skissa grafen till funktionen $f(x) = 3\ln(x^2+2) - 3\ln(x^2+1) - 2\arctan x$, $x \geq -2$ och ange f:s värdemängd.

2. Undersök gränsvärdena

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{2^x - 3x^2 + 4x^3}{3^x - 4x^2 + 5x^3}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x^2} - \sqrt{1-3x^2}}{x\ln(1+x)}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln(2-x)}{\sin \pi x}$.

3. Beräkna

   (a) $\displaystyle\int \frac{dx}{1-2x^2}$ (b) $\displaystyle\int \arctan 2x\, dx$ (c) $\displaystyle\int e^{\cos x} \sin 2x\, dx$.

4. Ange antalet lösningar till $\displaystyle\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{x/2} = k$ för alla reella värden på k.

5. (a) Antag att f är deriverbar i punkten x. Ange definitionen av $f'(x)$.

   (b) Låt $f(x) = e^{x^2}$. Beräkna $f'(x)$ med definitionen i (a)-uppgiften.

   (c) Undersök $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\arctan\left(\frac{1}{2}+h\right) - \arctan\frac{1}{2}}{h}$.

6. Visa att $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k^3+k} < \frac{5}{2}$ för alla $n = 1, 2, 3, \ldots$

7. Beräkna $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{2+\sqrt{1-x^2}}$.