

Tentamen i Envariabelanalys 1

2022-08-23 kl. 8.00-13.00

Penna, radergummi, linjal, passare och gradskiva utan formler på får användas. Inga andra hjälpmedel är tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n - 1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$). Svar publiceras på kursens hemsida senast dagen efter tentan.

1. Skissa grafen till funktionen $f(x) = 4 \ln x - 8 \arctan x - 2 \ln(1 + x^2) - \frac{6}{x}$.

Ange alla lodräta och vågräta asymptoter samt lokala extrempunkter.

2. Beräkna

(a) $\int \frac{x^2 - 2}{x^2 - 1} dx$ (b) $\int x^3 \cos x^2 dx$ (c) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 6x + 1}}$.

3. Undersök gränsvärdena

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 - 7x})$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan \sqrt{x}}{\sqrt{\sin 3x}}$ (c) $\lim_{x \rightarrow \ln 2} \frac{e^{2x} + e^x - 6}{5e^x - 2e^{2x} - 2}$.

4. Undersök och beräkna (om möjligt)

(a) $\int_0^1 \frac{\ln x}{x} dx$ (b) $\int_0^1 \ln x dx$ (c) $\int_{-1}^0 \ln(x^2) dx$.

5. (a) Definiera vad det betyder att f är kontinuerlig i $x = a$.

(b) Antag att f är deriverbar i punkten $x = a$. Ange definitionen av $f'(a)$.

(c) Visa att f är kontinuerlig i $x = a$ om $f'(a)$ existerar.

6. Visa att $\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \leq \int_0^{1/\sqrt{2}} \sin(\pi x^2) dx \leq \frac{3}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2}$.

7. Låt $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(ne^{x/n} + \frac{\ln(1 + x^n)}{x^{n-1}} - n \right)$ för $x > 0$. Ange alla lokala extrempunkter med tillhörande extremvärden till $f(x) = g(x) + g(1/x)$ samt skissa grafen till f .