Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA41
Modul: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 1

2023-01-11 kl. 8.00–13.00

Penna, radergummi, linjal, passare och gradskiva utan formler på får användas. Inga andra hjälpmedel är tillåtna. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$). Svar anslås på kursens hemsida.

1. Skissa grafen till funktionen $f(x) = e^{3x}\left(2 - \dfrac{3}{x}\right)$. Ange alla lodräta och vågräta asymptoter samt lokala extrempunkter.

2. Beräkna

   (a) $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \arctan 3x\,dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x^2+2x+2}\,dx.$

3. Undersök gränsvärdena

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to-1} \frac{x^2+3x+2}{x^2-x-2}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{3x+\ln x}{\sqrt{x}-2x+\sin x}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (2^x+5^x)^{\frac{1}{x}}$.

4. Beräkna den generaliserade integralen $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x^2+x\sqrt{x}}$, eller visa divergens.

5. (a) Formulera analysens huvudsats.

   (b) Låt $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t^2}\,dt$. Visa att f antar ett minsta värde på $x > 0$ och ange för vilket/vilka x som det sker.

6. Ange, för samtliga reella värden på konstanten k, antalet reella lösningar till ekvationen $(x-3)\ln(3-x) + 3 - x\ln x = k(x-3)$.

7. Anta att f är en funktion sådan att $f''(x)$ existerar för alla $x \in \mathbf{R}$ och att f har minst tre olika reella nollställen. Visa att f'' har minst ett reellt nollställe.