LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen

TATA41
TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 1
2024-06-03 kl. 14.00-19.00

Penna, radergummi, linjal, passare och grad-/radianskiva utan formler på får användas. Inga andra hjälpmedel är tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och innehålla ett tydligt utskrivet svar till varje uppgift. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Tentamen består av tre delar: A1, A2 och B.

- **Del A1** består av 2 uppgifter, numrerade 1 och 2, värda 3p var.
- **Del A2** består av 2 uppgifter, numrerade 3 och 4, värda 3p var.
- **Del B** består av 3 uppgifter, numrerade 5–7, värda 3p var.

Med **godkänd uppgift** menas en uppgift som bedömts med minst 2p.
För godkänd tentamen (**betyg 3/4/5**) räcker krav K1, K2 och K3, där

- **K1:** Minst 2 poäng på del A1.
- **K2:** Minst 2 poäng på del A2.
- **K3:** Minst 3/4/5 godkända uppgifter och minst 8/12/16 poäng totalt.

Del A1 - Differentialkalkyl

1. Skissa grafen till funktionen $f(x) = 2\ln x + \dfrac{1}{x-1}$. Ange alla lokala extrempunkter till f samt en ekvation för den linje som tangerar grafen i punkten $(3, f(3))$.

2. Undersök gränsvärdena

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{\sin 2x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+3}{x^2+2}e^{-x}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)$.

Var god vänd!

Del A2 - Integralkalkyl

3. Beräkna

   (a) $\displaystyle\int_0^{1/2} \arctan 2x\, dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+2\sin^2 x}\, dx$ (c) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2+x-2}$.

4. Bestäm $\displaystyle\int_2^{\infty} e^{-(x-2)}\, dx$ direkt från definitionen av generaliserad integral.

   Beräkna också $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-2|}\, dx$ eller visa divergens.

Del B

5. Ange antalet olika reella lösningar till ekvationen $f(x) = (x+2)e^{1/x} = k$ för samtliga reella värden på konstanten k.

6. (a) Låt f vara definierad på $\mathbf{R}$. Ange definitionen av att f har ett lokalt minimum i $x = a$.

   (b) Ange en kontinuerlig funktion f som har ett lokalt minimum i $x = 5$ utan att vara deriverbar i $x = 5$.

   (c) Avgör om $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x^2 \sin \dfrac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$ har ett lokalt minimum i $x = 0$.

7. f är kontinuerlig på $[a, b]$ med $f(a) < y < f(b)$. Sätt $C_y = \{x \in [a, b]\,;\, f(x) < y\}$ och låt c vara det minsta talet med egenskapen att $x \leq c$ för alla $x \in C_y$ (att ett sådant c existerar behöver du ej bevisa).

   (a) Visa att $f(c) \geq y$.
   Ledning: Vad kan sägas om $f(x)$ om $x > c$?

   (b) Låt $d \in [c, b]$, $f(d) > y$. Visa att det finns $\delta > 0$ så att $f(x) > y$ närhelst $|d - x| < \delta$ och således att $c < d$.

   (c) Visa att $f(c) = y$.
