LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen

TATA41
TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 1
2024-08-27 kl. 8.00-13.00

Penna, radergummi, linjal, passare och grad-/radianskiva utan formler på får användas. Inga andra hjälpmedel är tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och innehålla ett tydligt utskrivet svar till varje uppgift. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Tentamen består av tre delar: A1, A2 och B.

- **Del A1** består av 2 uppgifter, numrerade 1 och 2, värda 3p var.
- **Del A2** består av 2 uppgifter, numrerade 3 och 4, värda 3p var.
- **Del B** består av 3 uppgifter, numrerade 5–7, värda 3p var.

Med **godkänd uppgift** menas en uppgift som bedömts med minst 2p.
För godkänd tentamen (**betyg 3/4/5**) räcker krav K1, K2 och K3, där

- **K1:** Minst 2 poäng på del A1.
- **K2:** Minst 2 poäng på del A2.
- **K3:** Minst 3/4/5 godkända uppgifter och minst 8/12/16 poäng totalt.

Del A1 - Differentialkalkyl

1. Undersök gränsvärdena

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-5x+6}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(e^{3x}-1)^2}{x\ln(1+x)}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+2^x)}{\ln(1+3^x)}$.

2. Skissa grafen till funktionen $f(x)=\dfrac{3-x}{3+x}+3\arctan x$. Ange alla vågräta asymptoter samt lokala extrempunkter till f.

Var god vänd!

Del A2 - Integralkalkyl

3. Beräkna

   (a) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+4x+5}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{x}{e^{2x}}\,dx$ (c) $\displaystyle\int \sin^3 x\,dx.$

4. Beräkna $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x^4-1}.$

Del B

5. Visa att $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 \le \frac{n^3}{3} + n^2 + n$ för $n = 1, 2, 3, \ldots.$

6. Bestäm värdemängden till $f(x) = x^\alpha \ln x$ för varje $\alpha \in \mathbf{R}$.

7. Låt f vara en kontinuerlig funktion definierad på $[0, \infty[$ som är 2 gånger deriverbar för $x > 0$. Antag att $f(0) = 0$, $\lim_{x\to 0^+} f'(x) < 0$ och att det finns ett tal $c > 0$ så att $f''(x) \ge c$ för $x > 0$.

   (a) Visa att $f(x) < 0$ för $x > 0$ tillräckligt nära 0.

   (b) Visa att $f'(x) \to \infty\,,\ x \to \infty$.

   (c) Visa att f har ett nollställe $x_0 > 0$.
