LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen

TATA41
TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 1

2025-01-15 kl. 8.00-13.00

Penna, radergummi, linjal, passare och grad-/radianskiva utan formler på får användas. Inga andra hjälpmedel är tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och innehålla ett tydligt utskrivet svar till varje uppgift. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Tentamen består av tre delar: A1, A2 och B.

- **Del A1** består av 2 uppgifter, numrerade 1 och 2, värda 3p var.
- **Del A2** består av 2 uppgifter, numrerade 3 och 4, värda 3p var.
- **Del B** består av 3 uppgifter, numrerade 5–7, värda 3p var.

Med **godkänd uppgift** menas en uppgift som bedömts med minst 2p.
För godkänd tentamen (**betyg 3/4/5**) räcker krav K1, K2 och K3, där

- **K1:** Minst 2 poäng på del A1.
- **K2:** Minst 2 poäng på del A2.
- **K3:** Minst 3/4/5 godkända uppgifter och minst 8/12/16 poäng totalt.

Del A1 - Differentialkalkyl

1. Låt f vara den funktion som ges av $f(x) = xe^{-x}$. Bestäm alla extrempunkter till f, dess värdemängd, samt en ekvation för tangentlinjen till grafen $y = f(x)$ i punkten $(2, f(2))$.

2. Undersök gränsvärdena

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to -1} \frac{2x^2 - x - 3}{x^2 + 3x + 2}; \qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 4x + 1}\right); \qquad \text{(c)}\ \lim_{x\to\pi/2} \frac{\cos 3x}{\cos x}.$$

Var god vänd!

Del A2 - Integralkalkyl

3. Beräkna

$$\text{(a)} \int \frac{2x+3}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x\,; \quad \text{(b)} \int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x\,; \quad \text{(c)} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2 \sin x\,\mathrm{d}x\,.$$

4. Beräkna den generaliserade integralen $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}(x-1)}\,\mathrm{d}x$, eller visa divergens.

Del B

5. Skissa grafen till den funktion f som ges av $f(x) = \arctan(2x) - \ln\left(\frac{3}{2} + x\right) + \frac{\pi}{4}$, och ange antalet nollställen.

6. Du står vid kanten av en cirkulär simbassäng med radie $R > 0$, och skall så fort som möjligt ta dig till den punkt som ligger på diametralt motsatt sida av bassängen. Du kan välja att gå en valfri sträcka längs bassängkanten, och därefter simma den resterande vägen till slutpunkten (eller, i extremfallen, antingen bara gå eller bara simma). Givet att du kan gå dubbelt så snabbt som du simmar, hur långt bör du gå innan du (eventuellt) hoppar i vattnet?

7. Givet $a > 0$, låt h vara den funktion som ges av $h(x) = \begin{cases} 0, & \text{om } x \leq a, \\ 1, & \text{om } x > a. \end{cases}$

   (a) Visa att h är (Riemann-)integrerbar på varje intervall på formen $[0, b]$, där $b > 0$, och beräkna $\displaystyle\int_0^b h(t)\mathrm{d}t$.

   (b) Avgör i vilka punkter funktionen f, definierad av $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^t h(t)\,\mathrm{d}t$ för alla $x > 0$, är deriverbar, och bestäm dess derivata i dessa punkter.
