

Tentamen i Envariabelanalys 1

2026-01-14 kl. 8.00-13.00

Penna, radergummi, linjal, passare och grad-/radianskiva utan formler på får användas. Inga andra hjälpmedel är tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och innehålla ett tydligt utskrivet svar till varje uppgift. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Tentamen består av tre delar: A1, A2 och B.

- **Del A1** består av 2 uppgifter, numrerade 1 och 2, värda 3p var.
- **Del A2** består av 2 uppgifter, numrerade 3 och 4, värda 3p var.
- **Del B** består av 3 uppgifter, numrerade 5–7, värda 3p var.

Med **godkänd uppgift** menas en uppgift som bedömts med minst 2p. För godkänd tentamen (**betyg 3/4/5**) räcker krav K1, K2 och K3, där

- **K1:** Minst 2 poäng på del A1.
- **K2:** Minst 2 poäng på del A2.
- **K3:** Minst 3/4/5 godkända uppgifter och minst 8/12/16 poäng totalt.

Del A1 - Differentialkalkyl

1. Undersök gränsvärdena

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt{1+2x}}{x} \quad (b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x^2)}{x - \ln x} \quad (c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x^3 - x}$$

2. Skissa kurvan $y = f(x)$, där $f(x) = \ln x - 2x - 3 \ln(4 - x)$. Ange särskilt lodräta och vågräta asymptoter, samt eventuella extrempunkter till f .

Del A2 - Integralkalkyl

3. Beräkna

$$(a) \int \frac{1+x-x^2}{x(x+1)^2} dx \quad (b) \int_1^e \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx \quad (c) \int \arctan 2x dx$$

4. Bestäm de generaliserade integralerna

$$(a) \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+3)} dx \quad (b) \int_{-1}^1 \frac{1}{x^3} dx$$

Var god vänd!

Del B

5. (a) Bestäm, om möjligt, konstanterna a och b så att funktionen f , som ges av

$$f(x) = \begin{cases} b \arctan \frac{1}{x}, & x < 0, \\ a, & x = 0, \\ \frac{\arcsin x}{x}, & x > 0, \end{cases}$$

blir kontinuerlig.

- (b) Man kan visa att funktionen g , som ges av $g(x) = xe^x$ för $x > 0$, är kontinuerlig, inverterbar och har kontinuerlig invers. Beräkna $(g^{-1})'(e)$.
6. Visa att, bland alla likbenta trianglar med en given omkrets $2L > 0$, har den liksidiga triangeln störst area. Rita en figur och definiera i denna de storheter som används i lösningen, och uttryck arean som en funktion av dessa storheter.
7. Låt $f(x) = e^x$ för $x \in [0, 1]$.

- (a) Bestäm en undertrappa ϕ till f sådan att $\int_0^1 \phi(x) \, dx > \frac{5}{4}$.

- (b) Bestäm en följd $(\phi_n)_{n \geq 1}$ av undertrappor till f sådan att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \phi_n(x) \, dx = \int_0^1 f(x) \, dx.$$
