

Tentamen i Envariabelanalys 1 2026-03-25 kl. 8.00-13.00

Penna, radergummi, linjal, passare och grad-/radianskiva utan formler på får användas. Inga andra hjälpmedel är tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och innehålla ett tydligt utskrivet svar till varje uppgift. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Tentamen består av tre delar: A1, A2 och B.

- **Del A1** består av 2 uppgifter, numrerade 1 och 2, värda 3p var.
- **Del A2** består av 2 uppgifter, numrerade 3 och 4, värda 3p var.
- **Del B** består av 3 uppgifter, numrerade 5–7, värda 3p var.

Med **godkänd uppgift** menas en uppgift som bedömts med minst 2p. För godkänd tentamen (**betyg 3/4/5**) räcker krav K1, K2 och K3, där

- **K1:** Minst 2 poäng på del A1.
- **K2:** Minst 2 poäng på del A2.
- **K3:** Minst 3/4/5 godkända uppgifter och minst 8/12/16 poäng totalt.

Del A1 - Differentialkalkyl

1. Skissa grafen till funktionen $f(x) = 3\sqrt{x} + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x-1}$. Ange alla lodräta/vågräta asymptoter samt lokala extrempunkter till f .

2. Undersök gränsvärdena

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 + x - 3}{x^2 - 1} \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{\ln(1 + \sin 7x)} \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{x^x - 1}.$$

Var god vänd!

Del A2 - Integralkalkyl

3. Beräkna

$$(a) \int_0^1 \frac{1}{5x - x^2 - 6} dx \quad (b) \int_0^4 \cos \sqrt{x} dx \quad (c) \int \frac{e^{\arctan 2x}}{4x^2 + 1} dx.$$

4. Beräkna $\int_3^{\infty} \frac{4x - 4}{(x^2 - 2x + 5)(x + 1)} dx$ eller visa divergens.

Del B

5. (a) Bestäm värdemängden till funktionen $f(x) = xe^{-x}$, $x \geq 0$.

(b) Låt g vara definierad i en omgivning av $x \in \mathbf{R}$. Definiera $g'(x)$.

(c) Beräkna $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + (x + h)^2) - \ln(1 + x^2)}{h}$ för fixt $x \in \mathbf{R}$.

6. Bestäm alla $\alpha \in \mathbf{R}$ sådana att $\int_1^{\infty} x^\alpha \ln x dx$ är konvergent och beräkna integralen för dessa värden på α .

7. (a) Låt f vara deriverbar på \mathbf{R} . Formulera Rolles sats för f .

(b) Antag att f är 2 gånger deriverbar på \mathbf{R} och att f har minst tre olika nollställen. Visa att f'' har minst ett nollställe.

Ledning: Använd satsen du formulerade i (a).
