Vanliga fel på TATA41 210824

1) Deriveringen gick över lag bra, men en del glömmer bort inre derivatan och skriver att $\frac{d}{dx}(\arctan 2x) = \frac{1}{1+(2x)^2}$ (FEL) istället för $\frac{d}{dx}(\arctan 2x) = \frac{2}{1+(2x)^2}$ (RÄTT).

   Observera också att nödvändiga gränsvärden och funktionsvärden ska *beräknas*. Att bara säga vad de blir utan vare sig resonemang eller räkningar räcker ej. I det här fallet blir det ju speciellt gränsvärden av typen $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ så en noggrann undersökning av dessa krävs innan någon slutsats kan dras.

   En del låter bli att faktorisera täljaren fullständigt (FEL). Om täljaren och/eller nämnaren inte faktoriseras fullständigt måste varje tecken i teckentabellen motiveras noggrant eftersom det i så fall inte är uppenbart hur tecknen blir.

   En del missar också att undersöka tecknen hos de olika faktorerna *mellan* de punkter som tagits med i teckentabellen (FEL). Utan att göra en sådan undersökning går det ju inte att uttala sig om derivatans tecken i dessa intervall och det finns heller ingen möjlighet att rita grafen.

   En del tar också med väldigt många punkter i teckentabellen. Detta är väl inte direkt fel, men det gör teckentabellen mindre överskådlig och lättläst och ger också en del extrajobb. I denna uppgift funns det ingen anledning att ha med fler punkter än 0 och 1/2.

   Alldeles för många skriver inget svar alls eller lämnar ett ofullständigt svar (FEL). När du gjort en uppgift, tänk på att alltid kontrollera att du skrivit ett tydligt svar. Gå också igenom frågeställningen en gång till och verifiera att du svarat på allt som det frågas efter. I denna uppgift *måste* svaret innehålla följande:

   - En lista på alla lokala extrempunkter till f (d v s $x = 0$ och $x = 1/2$) där du också talar om vad för slags extrempunkt det rör sig om (lokalt minimum respektive lokalt maximum). Ta INTE med eventuella nollställen till derivatan som inte utgör några extrempunkter (t ex terrasspunkter).
   - En lista på alla lodräta asymptoter. I detta fall finns det inga, men även det måste förstås påpekas så att vi examinatorer ser att du kommit fram till detta och inte bara glömt att kolla.

     I detta sammanhang vill vi också nämna att det på tidigare skrivningar förekommit att en del har dragit slutsatsen att det finns en lodrät asymptot bara för att en punkt saknas den aktuella funktionens definitionsmängd (FEL), och missar då att det krävs att funktionens värden $\to \infty$ då x närmar sig punkten från vänster eller höger för att funktionen ska ha en lodrät asymptot. T ex är linjen $x = 0$ *inte* en lodrät asymptot till funktionen $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ trots att denna inte är definierad i $x = 0$.
   - En lista på alla vågräta asymptoter. Tänk på att asymptoterna är räta linjer och att det alltså är ekvationer för dessa linjer det frågas efter. En del har tyvärr angett asymptoten då $x \to \infty$ som $1 - \pi/2$ (FEL, detta är ett tal och inte en rät linje) eller $f(x) \to 1 - \pi/2$ (FEL, detta är ett gränsvärde och inte en rät linje) istället för det korrekta $y = 1 - \pi/2$ (RÄTT). Observera att det inte räcker att rita asymptoterna i sin figur utan deras ekvationer måste anges explicit i svaret. Allt detta gäller för övrigt också för lodräta asymptoter, ifall det nu hade funnits några.

- Antalet nollställen till f. Här har en del tyvärr svarat med nollställena till f' istället (FEL).

2a) Inget speciellt att kommentera.

2b) En del byter variabler: $x = t-1$ (bra så långt) men säger sedan att $\dfrac{\sin(\pi(t-1))}{\pi(t-1)} \to 1\,,\; t \to 0$ (FEL) och att detta är ett standardgränsvärde (också FEL). Tänk på att $\dfrac{\sin y}{y}$ bara är ett standardgränsvärde ifall $y \to 0$. Det går alltså *inte* att byta y mot $\pi(t-1)$ om $t \to 0$.

2c) Här verkar många ha glömt Sats 3.1 som säger att nollgående faktor gånger begränsad faktor går mot noll. Utan att referera till denna går det knappast att lösa denna uppgift.

3a) En del säger att $\dfrac{e^{x^3}}{3x^2}$ är en primitiv till e^{x^3} (FEL) och använder detta för att partialintegrera, men primitiven till e^{x^3} kan inte uttryckas med elementära funktioner. Att $\dfrac{e^{x^3}}{3x^2}$ inte duger ses enklast genom att derivera:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{x^3}\cdot\frac{1}{3x^2}\right) = e^{x^3} - \frac{e^{x^3}}{9x^4}\cdot 6x \neq e^{x^3}$$

3b) En del missar på standardprimitiverna och skriver $\displaystyle\int \frac{dt}{4-t^2} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{t}{2} + C$ (FEL), $\displaystyle\int \frac{dt}{4-t^2} = \frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2} + C$ (FEL) eller $\displaystyle\int \frac{dt}{4-t^2} = \ln(4-t^2) + C$ (FEL) eller liknande, istället för att partialbråksuppdela.

Efter partialbråksuppdelningen missar en del inre derivatan vid integrationen och skriver $\displaystyle\int \frac{dt}{2-t} = \ln|2-t| + C$ (FEL) istället för $\displaystyle\int \frac{dt}{2-t} = -\ln|2-t| + C$ (RÄTT).

Ett annat vanligt fel var att tappa bort beloppstecknen och skriva $\displaystyle\int \frac{dt}{2-t} = -\ln(2-t) + C$ (FEL). I just detta fall visar det sig att beloppstecknen inte behövs, men det ser man först efter att ha bytt tillbaka till variabeln x:

$$\int \frac{dt}{2-t} = -\ln|2-t| + C = -\ln|2-\sin x| + C = -\ln(2-\sin x) + C \text{ (RÄTT)},$$

där sista likheten följer av att $2 - \sin x > 0$ för alla x. $\displaystyle\int \frac{dt}{2+t}$ hanteras på liknande sätt.

3c) Det kritiska här var att känna igen standardderivatan $\dfrac{d}{dx}(\tan x) = 1/\cos^2 x$.

Ett fel som återkom på alla tre deluppgifterna var att en del missar att $\displaystyle\int f(x)\,dx$ betyder 'samtliga primitiver till f'. Detta betyder att '$+C$' måste vara med *så fort* det sista integraltecknet försvinner. Att '$+C$' inte finns med alls eller plötsligt materialiseras ur intet i sista steget är inte godkänt.

4) De flesta lyckas hitta rätt uttryck för $V(x)$ (beteckningar som i lösningsskissen): $V(x) = x\cdot 2x\cdot(12-2x)$ men anger sedan inte vilken definitionsmängd V ska ha (FEL).

Detta blir väldigt tokigt eftersom definitionsmängden alltid tolkas som den största möjliga, d v s hela $\mathbf{R}$ i detta fall, om inget annat sägs och i så fall försöker vi alltså hitta det största värdet till en funktion som inte har något största värde (ty $V(x) \to \infty\,,\; x \to -\infty$).

En del säger att definitionsmängden ges av villkoret $x > 0$ (FEL). Detta villkor garanterar visserligen att längd och bredd blir positiva men även höjden måste vara positiv vilket också ger villkoret $12 - 2x > 0$, d v s den korrekta definitionsmängden ges av $0 < x < 6$ (RÄTT).

Ett annat problem med att inte reda ut definitionsmängden ordentligt är att när den stationära punkten $x = 4$ hittats vet vi inte om $x = 4$ är ett tillåtet värde på x eller inte. Vi är alltså tvungna att kontrollera i efterhand om detta x-värde gör alla sidlängder positiva. Denna kontroll har tyvärr missats av många.

En del motiverar villkoret $x > 0$ med att $V(x)$ måste vara positiv (FEL). Det är visserligen sant att $V(x)$ måste vara positiv, men detta är inget skäl för att utesluta att $x < 0$ ty $V(x) > 0$ om $x < 0$. Villkoret $x > 0$ kommer istället från att längd och bredd måste vara > 0.

En del (oroväckande många, faktiskt) hittar derivatans nollställen och säger att eftersom $V'(4) = 0$ så är detta $V(x)$:s största värde, eventuellt efter att ha jämfört med värdet $V(0)$ där V:s derivata också är 0 (JÄTTEFEL!!!). I punkter där en funktion har derivata $= 0$ kan funktionen ha lokalt minimum, lokalt maximum, terrasspunkt och mycket annat. I inget av dessa fall följer det med någon automatik att detta skulle vara funktionens största värde.

Om detta är oklart rekommenderar vi att du tittar igenom de exempel på kurvritning som gjorts i kursboken, föreläsningsfilmerna, övningsuppgifterna och i lösningsskisserna till gamla tentor som ligger på kurshemsidan. På detta sätt kommer du att hitta dussintals med exempel på punkter där derivatan är noll utan att funktionen har största värde där.

En del visar att $x = 4$ är ett lokalt maximum med hjälp av en teckentabell eller genom att titta på andraderivatan (RÄTT så långt) och drar sedan slutsatsen att detta måste vara $V(x)$:s största värde, ibland med motiveringen att det inte finns något mer lokalt max (FEL). Det finns dock gott om funktioner som har ett enda lokalt max men ändå saknar största värde och $V(x)$ själv är enligt ovan en sådan funktion om vi inte gör några inskränkningar i dess definitionsmängd. Du hittar också många fler motexempel på samma sätt som beskrevs i förra stycket.

5) Beroende på hur du planerar arbetet i denna uppgift kan det förekomma både generaliserade integraler, integraler över begränsade intervall och obestämda integraler i lösningen. Det är då viktigt att vara konsekvent.

Har du börjat med att t ex studera den givna generaliserade integralen kan det inte efter en kedja av likheter plötsligt stå en obestämd integral. Om du istället börjat titta på en obestämd integral kan det inte plötsligt dyka upp gränser på den. En integral med gränser är ju ett tal medan en obestämd integral är en samlingsbeteckning för oändligt många olika funktioner av en variabel (p g a '$+C$') så dessa kan *inte* vara lika!

Försiktighet vid hanteringen av generaliserade integraler krävs också. En del använder att

$$\int_1^\infty \left(\frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2+2x+2}\right) dx = \int_1^\infty \frac{dx}{x} - \int_1^\infty \frac{x+1}{x^2+2x+2}\, dx \quad \text{(FEL)},$$

men en sådan uppdelning går bara att göra om båda delintegralerna är *konvergenta* vilket inte är fallet här. En uppdelning i två delintegraler kan dock göras på följande sätt:

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \left(\frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2+2x+2}\right) dx &= \lim_{\omega\to\infty} \int_1^\omega \left(\frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2+2x+2}\right) dx \\ &= \lim_{\omega\to\infty} \left(\int_1^\omega \frac{dx}{x} - \int_1^\omega \frac{x+1}{x^2+2x+2}\, dx\right) \quad \text{(RÄTT)},\end{aligned}$$

och sedan lyfta ut de båda icke-generaliserade integralerna och beräkna dem var för sig.

6) Ett vanligt fel var att inte använda analysens huvudsats rätt, t ex genom att säga att $\frac{d}{dx}\int_{e^2}^{x} \frac{dt}{\ln t} = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{\ln e^2}$ (FEL) istället för $\frac{d}{dx}\int_{e^2}^{x} \frac{dt}{\ln t} = \frac{1}{\ln x}$ (RÄTT).

7a) Många räknar ut $g'(x)$ för $x \neq 0$ vilket i och för sig inte är fel, men det ger ingen användbar information för att lösa uppgiften. Frågan var ju om $g'(0)$ existerar och existens eller icke-existens av $g'(x)$ för $x \neq 0$ respektive $\lim_{x\to 0} g'(x)$ ger ingen information i den frågan.

På både a) och b) anger en del obegränsade funktioner som förslag på motexempel, vilket strider mot förutsättningarna.

7b) Inget ytterligare att kommentera.