

Tentamen i Envariabelanalys 1

2017-01-11 kl. 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n - 1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$). Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Skissa grafen för $f(x) = \left(\frac{1}{x} - 2\right)e^{-x}$. Ange alla eventuella lodräta och vågräta asymptoter samt lokala extrempunkter.
2. Beräkna följande bestämda respektive obestämda integraler:

$$(a) \int_0^{\pi/2} \cos x \sin 2x \, dx \quad (b) \int_{-1}^1 x^7 e^{x^4} \, dx \quad (c) \int \arcsin 2x \, dx.$$

3. Linus och Linnea ska konstruera en nyårsrektangel som omfattar 1 areaenhet. Kanterna ska kläs med två sorters girlanger. Ett par av motstående sidor pyntas med budgetvarianten som väger 1 gram per längdenhet. Det andra paret draperas i lyxgirlinganger om 2 gram per längdenhet. Vad väger girlangerna på Linus och Linneas rektangel som minst?
4. (a) Definiera vad som menas med att funktionen f är kontinuerlig i punkten a .
(b) Finn konstanter A och B så att följande funktion är kontinuerlig på hela \mathbb{R} :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \sin Ax}{e^{x^2} - 1} & \text{om } x < 0, \\ B & \text{om } x = 0, \\ \arctan(x2^{1/x}) & \text{om } x > 0. \end{cases}$$

5. Beräkna den generaliserade integralen $\int_1^\infty \frac{8}{x^3 - x^2 + 3x + 5} \, dx$ (eller visa att den divergerar).
6. Visa med definitionen av gränsvärde att $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 6x) = -9$.
7. Antag att funktionerna f och g är kontinuerliga i en omgivning till a och att f och produkten fg är deriverbara i a medan g inte är det. Visa att $f(a) = 0$.