

Tentamen i Envariabelanalys 1

2017-03-17 kl. 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n - 1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$). Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Låt $f(x) = 5 \arctan 2x + 4 \arctan(1/x)$ för $x > 0$. Rita grafen $y = f(x)$ och ange alla eventuella lodräta och vågräta asymptoter samt lokala extrempunkter.
2. Härled derivatan av nedanstående funktioner, direkt ur definitionen av derivata. (Standardgränsvärden får naturligtvis användas.)

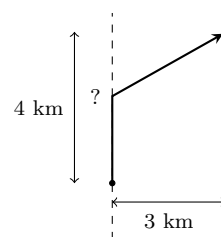
(a) $f(x) = x^4$ (b) $f(x) = \ln x, \quad x > 0$ (c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x > 0$

3. Beräkna $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + e^x}$ (eller visa divergens).

4. Beräkna följande integraler:

(a) $\int_{-2}^0 x\sqrt{1 + 4x^2} dx$ (b) $\int_0^1 \frac{5}{(x - 2)(x^2 + 1)} dx$ (c) $\int_0^{2\pi} \cos^2(x/3) dx$

5. Orienteraren Linnea står på en skogsstig som går från söder till norr. Hon vill komma till en punkt som ligger 4 km norr och 3 km öster om henne. Hon springer dubbelt så snabbt på stigen som i skogen. Hur långt ska hon springa på stigen innan hon viker av in i skogen, för att komma fram så fort som möjligt?



(Motivera tydligt varför det verkligen blir *snabbaste* vägen.)

6. Beräkna $\int_{-1}^5 |f'(x)| dx$, där $f(x) = (x^2 - 3x + 1)e^{-x}$.

7. Antag att funktionen f är deriverbar på \mathbf{R} och att $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 17$. Visa att $f'(\xi) = 0$ för något $\xi \in \mathbf{R}$.