

Tentamen i Envariabelanalys 1

2017-04-19 kl. 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n - 1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$). Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Rita grafen $y = f(x)$ för följande funktioner:

(a) $f(x) = 1/x$ (b) $f(x) = \arctan(1/x)$ (c) $f(x) = e^{1/x}$

Obs! Just på denna uppgift ska **enbart svar** lämnas in, **inga motiveringar eller uträkningar**. Rita tydligt så att definitionsmängd, relevanta gränsvärden, samt eventuella lokala extrempunkter framgår i figuren. (Det går även bra att skriva upp det bredvid ifall du tycker att det behövs för tydlighets skull. Asymptoter behöver ej anges.)

2. Undersök följande gränsvärden:

(a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sin(x+2)}{x^2 - x - 6}$ (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x)$ (c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x)$

3. Beräkna följande integraler:

(a) $\int \frac{x^2 + x + 3}{4 + x^2} dx$ (b) $\int \sin \sqrt{x} dx$ (c) $\int \frac{dx}{\sin x}$

4. Beräkna integralen $\int_2^\infty \frac{\ln(1+2x)}{x^2} dx$ (eller visa att den är divergent).

5. Antag att $f(x)$ är deriverbar för $x > 0$. Är nedanstående påståenden sanna eller falska, då $x \rightarrow \infty$? (Ge ett bevis eller ett tydligt motexempel i varje deluppgift.)

- (a) Om $f(x) \rightarrow \infty$ så måste $f'(x) \rightarrow \infty$.
(b) Om $f'(x) \rightarrow 0$ så måste $f(x) \rightarrow L$ för något $L \in \mathbf{R}$.
(c) Om $f(x) \rightarrow L$ för något $L \in \mathbf{R}$ så måste $f'(x) \rightarrow 0$.

6. Hur många reella lösningar i intervallet $-1 \leq x \leq 2$ har ekvationen $e^x = kx$ för olika värden på konstanten $k \in \mathbf{R}$?

7. Låt $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/3} \sqrt{1 - \cos x} dx$.

- (a) Vilken uppskattning $A \leq I \leq B$ får man från (bästa tänkbara) under- och övertrappor med bara ett enda trappsteg? (1p)
(b) Beräkna I . (2p)