

Tentamen i Envariabelanalys 1

2017-06-05 kl. 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n - 1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$). Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Undersök gränsvärdena

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2x - 1)}{x^2 + x - 2} \quad (b) \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \ln(x + 3e^x)) \quad (c) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 - 17x}).$$

2. Beräkna de obestämda integralerna

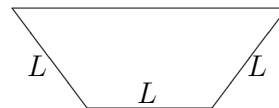
$$(a) \int x \arctan x \, dx \quad (b) \int \frac{x + 2}{\sqrt{x + 3}} \, dx \quad (c) \int \sin 2x \cos^3 x \, dx.$$

3. Beräkna de generaliserade integralerna (eller visa divergens)

$$(a) \int_0^{\infty} \frac{2x}{1 + x^2} \, dx \quad (b) \int_0^1 \ln x \, dx \quad (c) \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} \, dx.$$

4. Hur många reella lösningar har ekvationen $(x + 6)e^{1/x} = k$ för olika reella värden på konstanten k ?

5. Ett parallelltrapets är som bekant en fyrhörning med två parallella sidor. Vilken är den största area som ett parallelltrapets kan ha om tre av dess sidor har längd L ?



6. Visa att $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3 + k} < \frac{1 + \ln 2}{2}$ för alla heltal $n \geq 1$.

7. Antag att $0 < a < b < 1$. Visa att $\ln \frac{(1 - a)(1 + b)}{(1 + a)(1 - b)} > 2(b - a)$.