Lösningsskisser för TATA41 2019-04-24

1. Funktionen $f(x) = 2\ln|x| - \arctan 3x - \ln(1+9x^2)$ är definierad för $x \neq 0$ och har derivatan

$$f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{3}{1+(3x)^2} - \frac{18x}{1+9x^2} = \frac{2-3x}{x(1+9x^2)}.$$

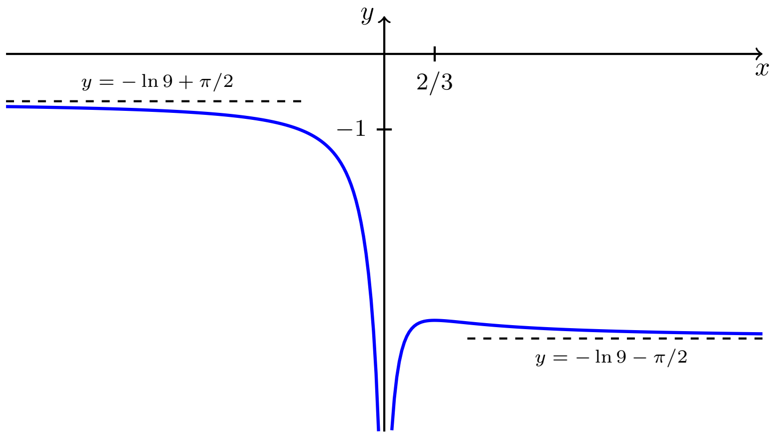
Teckentabell:

x		0		$\frac{2}{3}$	
$2-3x$	$+$		$+$	0	$-$
x	$-$	0	$+$		$+$
$1+9x^2$	$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	$-$	ej def.	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	ej def.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

Linjen $x = 0$ är en lodrät asymptot till grafen $y = f(x)$ eftersom $f(x) \to -\infty$ då $x \to 0$ (uppenbart), och linjerna $y = -\ln 9 \pm \frac{\pi}{2}$ är vågräta asymptoter eftersom

$$f(x) = -\ln(\tfrac{1}{x^2} + 9) - \arctan 3x \to -\ln 9 \mp \frac{\pi}{2}, \quad \text{då } x \to \pm\infty.$$

Båda de vågräta asymptoterna ligger nedanför x-axeln, eftersom $\ln 9 = 2\ln 3 > 2\ln e = 2$ och $\pi/2 < 4/2 = 2$, och även det lokala maximivärdet $f(\frac{2}{3}) = 2\ln\frac{2}{3} - \arctan 2 - \ln(5)$ är uppenbart negativt.



Svar: $2/3$ är en lokal maximipunkt, linjen $x = 0$ är en lodrät asymptot, linjerna $y = -\ln 9 \pm \frac{\pi}{2}$ är vågräta asymptoter.

2. (a) $\frac{e^{3x}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} = \frac{(e^{3x}-1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(1+x)-(1-x)} = \frac{3}{2}\frac{e^{3x}-1}{3x}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}) \to \frac{3}{2}\cdot 1 \cdot (1+1) = 3$ då $x \to 0$, enligt ett standardgränsvärde (och eftersom kvadratrotsfunktionen är kontinuerlig).

(b) $\frac{x+\ln(1+e^x)}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x+x+\ln(e^{-x}+1)}{|x|\sqrt{1+x^{-2}}} = [x > 0] = \frac{2+\frac{1}{x}\ln(e^{-x}+1)}{\sqrt{1+x^{-2}}} \to \frac{2+0\cdot 0}{1} = 2$ då $x \to \infty$.

(c) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{\cos\left(\frac{\pi(1+t)}{2}\right)} = -\frac{2}{\pi}$, eftersom $\frac{\ln(1+t)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi t}{2}\right)} = \frac{\ln(1+t)}{-\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)} = -\frac{2}{\pi}\frac{\ln(1+t)}{t}\frac{\frac{\pi t}{2}}{\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)} \to -\frac{2}{\pi}\cdot 1 \cdot 1$ då $t \to 0$, enligt standardgränsvärden.

Svar: (a) 3 (b) 2 (c) $-2/\pi$

3. (a) Upprepad partiell integration ger $\int \cos 2x \cdot x^2\,dx = \frac{\sin 2x}{2}\cdot x^2 - \frac{-\cos 2x}{4}\cdot 2x + \frac{-\sin 2x}{8}\cdot 2 + C = (\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4})\sin 2x + \frac{x}{2}\cos 2x + C$.

   (b) Variabelbytet $s = \sin x$, $ds = \cos x\,dx$ ger $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x} dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^3 x}\cos x\,dx = \int \frac{1-s^2}{s^3}\,ds = \int (s^{-3} - s^{-1})\,ds = -\frac{1}{2}s^{-2} - \ln|s| + C = \frac{-1}{2\sin^2 x} - \ln|\sin x| + C$.

   (c) Variabelbytet $t = x^{25}$, $dt = 25\,x^{24}\,dx$ ger $\int \frac{dx}{x(1+x^{25})} = \int \frac{x^{24}\,dx}{x^{25}(1+x^{25})} = \frac{1}{25}\int \frac{dt}{t(1+t)} = \frac{1}{25}\int (\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t})\,dt = \frac{1}{25}(\ln|t| - \ln|1+t|) + C = \ln|x| - \frac{1}{25}\ln\left|1 + x^{25}\right| + C$.

   Svar: Se ovan.

4. Skriv $f(x) = x^{1/x^2} = (e^{\ln x})^{1/x^2} = e^{g(x)}$, där $g(x) = \frac{\ln x}{x^2} = \ln x \cdot \frac{1}{x^2}$, $x > 0$. Hjälpfunktionen g har derivatan

$$g'(x) = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2} + \ln x \cdot \frac{-2}{x^3} = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}, \qquad x > 0.$$

   Alltså:

x	0		$e^{1/2}$	
$g'(x)$	ej def.	$+$	0	$-$
$g(x)$	ej def.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

   Eftersom

$$g(x) = \underbrace{\ln x}_{\to -\infty} \cdot \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to +\infty} \to -\infty \qquad \text{då } x \to 0^+$$

   kommer g att anta alla reella värden mindre än eller lika med $g(e^{1/2}) = \frac{1}{2e}$. Detta medför, eftersom exponentialfunktionen är strängt växande och $e^t \to 0$ då $t \to -\infty$, att $f(x) = e^{g(x)}$ antar alla värden i intervallet $]0, e^{1/(2e)}]$.

   Svar: $V_f =]0, e^{1/(2e)}]$.

5. Variabelbytet $t = 1/x$, $dt = -dx/x^2$ ger

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{\arctan\frac{1}{x}}{x^2}\,dx &= \lim_{\omega\to\infty}\int_\omega^1 \arctan\tfrac{1}{x}\,\frac{-dx}{x^2} = \lim_{\omega\to\infty}\int_{1/\omega}^{1/1}\arctan t\,dt \\ &= \int_0^1 \arctan t\,dt = \Big[t\arctan t\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt \\ &= \frac{\pi}{4} - \left[\frac{\ln(1+t^2)}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.\end{aligned}$$

   Svar: $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$.

6. (a) Se läroboken (Forsling & Neymark), Sats 4.10.

   (b) Se läroboken, beviset för Sats 4.8(a).

   (c) T.ex.

$$f(x) = \begin{cases} 17, & x < 0, \\ 43, & x > 0. \end{cases}$$

7. Den som är bekant med Riemannsummor (Avsnitt 6.6 i läroboken) vet att

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{k} f(m/k) = \int_0^1 f(x)\,dx$$

om f är kontinuerlig (eller bara Riemannintegrerbar), eftersom summan i vänsterledet är en Riemannsumma

$$\sum_{m=1}^{k} (x_m - x_{m-1})\, f(\xi_m) \qquad (x_{m-1} \le \xi_m \le x_m)$$

för integralen i högerledet, med indelningspunkterna $x_m = m/k$ för $m = 0, \ldots, k$ och samplingspunkterna $\xi_m = m/k$ för $m = 1, \ldots, k$.

Detta ger direkt svaret:

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{2k^2 - m^2}} &= \lim_{k\to\infty} \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{k} \frac{1}{\sqrt{2 - (m/k)^2}} \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2 - x^2}} = \left[\arcsin \frac{x}{\sqrt{2}}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Annars kan man under- och överskatta, t.ex. såhär: summan

$$S_k = \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{k} f(m/k) = \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{k} \frac{1}{\sqrt{2 - (m/k)^2}}$$

är en översumma (rita figur, k stycken staplar med bredd $\frac{1}{k}$) till integralen

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2 - x^2}} = \frac{\pi}{4}$$

eftersom $f(x) = 1/\sqrt{2 - x^2}$ är strängt växande på intervallet $[0, 1]$, och en undersumma till samma integral fås genom att skifta summationsindexet ett steg (rita ny figur), vilket ger nästan samma summa igen, förutom att en term har tillkommit i början och en term har försvunnit i slutet:

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{k} f(m/k) &= \frac{1}{k} f(0/k) + \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{k} f(m/k) - \frac{1}{k} f(k/k) \\ &= \frac{1}{k\sqrt{2 - (0/k)^2}} + S_k - \frac{1}{k\sqrt{2 - (k/k)^2}}\end{aligned}$$

Alltså

$$S_k \ge \frac{\pi}{4} \qquad \text{och} \qquad \frac{1}{k\sqrt{2}} + S_k - \frac{1}{k} \le \frac{\pi}{4},$$

så att

$$\frac{\pi}{4} \le S_k \le \frac{\pi}{4} + \frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Resultatet $S_k \to \pi/4$ då $k \to \infty$ följer nu av instängningsregeln.

Svar: $\pi/4$.