Lösningsskisser för TATA41 2019-08-27

1. (a) $\int \ln(2x)\,dx = \int 1\cdot\ln(2x)\,dx = x\ln(2x) - \int x\,\frac{2}{2x}\,dx = x\ln(2x) - x + C$.

   (b) $\int \frac{x^2}{x^2-4}\,dx = \int \left(1 + \frac{4}{x^2-4}\right) dx = \int \left(1 + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right) dx = x + \ln|x-2| - \ln|x+2| + C$.

   (c) Med $t = e^x$ fås $dt = e^x dx$ och $\int e^{2x}\sin(e^x)\,dx = \int t\sin t\,dt = t\cdot(-\cos t) - \int 1\cdot(-\cos t)\,dt = -t\cos t + \sin t + C = \sin(e^x) - e^x\cos(e^x) + C$.

   Svar: Se ovan.

2. (a) $\frac{x^2-x-2}{x^2+x-6} = \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+3)} = \frac{x+1}{x+3} \to \frac{2+1}{2+3} = \frac{3}{5}$ då $x \to 2$.

   (b) Variabelbytet $t = x-1$ ger $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(3-2x)}{\sin(x-1)} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(3-2(1+t))}{\sin t} = -2$, ty $\frac{\ln(1-2t)}{\sin t} = -2\cdot\frac{\ln(1+(-2t))}{-2t}\cdot\frac{t}{\sin t} \to -2\cdot 1\cdot 1$ då $t \to 0$, enligt standardgränsvärden.

   (c) Sätt $t = -x$ så erhålls $\lim_{x\to-\infty} \frac{x+\ln(1+e^x)}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{t\to\infty} \frac{-t+\ln(1+e^{-t})}{\sqrt{t^2+1}} = -1$, eftersom $\frac{-t+\ln(1+e^{-t})}{\sqrt{t^2+1}} = [\text{för } t>0] = \frac{-t+\ln(1+e^{-t})}{t\sqrt{1+t^{-2}}} = \frac{-1+\frac{1}{t}\cdot\ln(1+e^{-t})}{\sqrt{1+t^{-2}}} \to \frac{-1+0\cdot\ln(1+0)}{\sqrt{1+0}} = -1$ då $t \to \infty$.

   Svar: (a) $\frac{3}{5}$ (b) -2 (c) -1.

3. Variabelbytet $t = \sqrt{x}$ ger $x = t^2$ och $dx = 2t\,dt$, så

$$\int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+2)} = \int_{\sqrt{2}}^\infty \frac{2t\,dt}{t\,(t^2+2)} = \int_{\sqrt{2}}^\infty \frac{dt}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}$$
$$= \lim_{\omega\to\infty}\left[\sqrt{2}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}\right]_{\sqrt{2}}^{\omega} = \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

4. Vi skriver olikheten som $f(x) \geq \pi/4$, där $f(x) = \arctan(1+2x^2) - x^2 + x^4$ för $x \in \mathbf{R}$. Från derivatan

$$f'(x) = \frac{4x}{1+(1+2x^2)^2} - 2x + 4x^3 = \frac{2x}{1+2x^2+2x^4} - 2x(1-2x^2)$$
$$= \frac{2x(1-(1-2x^4-4x^6))}{1+2x^2+2x^4} = \frac{4x^5(1+2x^2)}{1+2x^2+2x^4}$$

   ser man att f är strängt avtagande för $x \leq 0$ och strängt växande för $x \geq 0$. Alltså är $f(0) = \arctan 1 = \pi/4$ globalt minimum, eller med andra ord $f(x) \geq \pi/4$ för alla $x \in \mathbf{R}$, vilket skulle visas.

5. (a) Det betyder att $F'(x) = f(x)$ för alla $x \in I$.

   (b) Derivering ger $\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x^2+1} + \arctan x\right) = \cdots = \frac{2}{(x^2+1)^2}$.

   (c) Integranden är kontinuerlig, så enligt analysens huvudsats är $F'(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}$.

6. Vi kan anta att A och B ligger på samma sida om y-axeln (t.ex. till höger), för om de ligger på varsin sida blir avståndet större. Kalla avståndet från origo till B för t; då kommer $2t$ att vara avståndet från origo till A. Koordinaterna för B är $(x,y) = (\sqrt{t^2-1}, 1)$ enligt Pythagoras' sats, och på samma sätt är A:s koordinater $(x,y) = (\sqrt{(2t)^2-1}, 1)$. Avståndet mellan A och B är alltså

$$f(t) = \sqrt{4t^2-1} - \sqrt{t^2-1}, \qquad t \geq 1.$$

Från derivatan

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{8t}{2\sqrt{4t^2-1}} - \frac{2t}{2\sqrt{t^2-1}} = \frac{t\big(4\sqrt{t^2-1} - \sqrt{4t^2-1}\big)}{\sqrt{4t^2-1}\sqrt{t^2-1}} \\ &= \frac{t\big(16(t^2-1) - (4t^2-1)\big)}{\sqrt{4t^2-1}\sqrt{t^2-1}\big(4\sqrt{t^2-1} + \sqrt{4t^2-1}\big)} \\ &= \frac{12t(t^2-\frac{5}{4})}{\sqrt{4t^2-1}\sqrt{t^2-1}\big(4\sqrt{t^2-1} + \sqrt{4t^2-1}\big)}, \qquad t > 1, \end{aligned}$$

(och från f:s kontinuitet i punkten $t = 1$) ser man att f är strängt avtagande på intervallet $[1, \sqrt{5}/2]$ och strängt växande på intervallet $[\sqrt{5}/2, \infty[$. Det minsta värdet är alltså $f(\sqrt{5}/2) = \sqrt{4} - \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{3}{2}$.

Svar: Kortaste möjliga avstånd är 3/2 (när $A = (2, 1)$ och $B = (\frac{1}{2}, 1)$).

7. Funktionen $f(x) = \int_0^1 \left|x - t^2\right| \, dt$ har definitionsmängd $D_f = \mathbf{R}$, och beräkning görs med falluppdelning:

- Om $x \geq 1$ är $x - t^2 \geq 0$ för alla t i integrationsintervallet $[0, 1]$, så
$$f(x) = \int_0^1 (x - t^2)\, dt = \Big[xt - \tfrac{1}{3}t^3\Big]_0^1 = x - \tfrac{1}{3}.$$
- Om $x \leq 0$ är $x - t^2 \leq 0$ för alla t i integrationsintervallet $[0, 1]$, så
$$f(x) = \int_0^1 (-(x - t^2))\, dt = -(x - \tfrac{1}{3}).$$
- Om $0 < x < 1$ så växlar $x - t^2$ tecken inuti integrationsintervallet, vid $t = \sqrt{x}$, så
$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\sqrt{x}} (x - t^2)\, dt + \int_{\sqrt{x}}^1 (-(x - t^2))\, dt \\ &= \Big[xt - \tfrac{1}{3}t^3\Big]_0^{\sqrt{x}} - \Big[xt - \tfrac{1}{3}t^3\Big]_{\sqrt{x}}^1 \\ &= \tfrac{4}{3}x^{3/2} - x + \tfrac{1}{3}. \end{aligned}$$

Att rita grafen $y = f(x) = \pm(x - \frac{1}{3})$ för $x \leq 0$ och för $x \geq 1$ är ju inte så svårt, men i mittenintervallet behöver vi räkna ut derivatan:

$$f'(x) = \tfrac{4}{3} \cdot \tfrac{3}{2} x^{1/2} - 1, \qquad 0 < x < 1.$$

Vi ser att $f'(x)$ växlar tecken från minus till plus då $x^{1/2} = \frac{1}{2}$, dvs. då $x = \frac{1}{4}$. Grafen ser alltså ut såhär, med minsta värdet $f(\frac{1}{4}) = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$: