Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA41
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 1

2019-08-27 kl. 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$). Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida, där även tid för tentamensvisning meddelas när resultaten är klara.

1. Beräkna följande obestämda integraler:

   (a) $\displaystyle\int \ln(2x)\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2-4}\,dx$ (c) $\displaystyle\int e^{2x}\sin(e^x)\,dx$.

2. Undersök gränsvärdena

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^2+x-6}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\ln(3-2x)}{\sin(x-1)}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{x+\ln(1+e^x)}{\sqrt{x^2+1}}$.

3. Beräkna den generaliserade integralen $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+2)}\,dx$ (eller visa divergens).

4. Visa att $\arctan(1+2x^2) - x^2 \geq \dfrac{\pi}{4} - x^4$ för alla $x \in \mathbf{R}$.

5. (a) Definiera vad som menas med att F är en primitiv funktion till f på (det öppna) intervallet I.

   (b) Visa att $\dfrac{x}{x^2+1} + \arctan x$ är en primitiv funktion till $\dfrac{2}{(x^2+1)^2}$.

   (c) Till vilken funktion är $F(x) = \displaystyle\int_7^x \frac{\sin t}{1+t^2}\,dt$ en primitiv funktion?

6. Två punkter A och B väljs på linjen $y = 1$ i xy-planet så att avståndet mellan origo och A är dubbelt så stort som avståndet mellan origo och B. Vilket är det kortaste möjliga avståndet mellan A och B? (Motivera noga att det verkligen är ett *minsta* värde.)

7. Skissa grafen för $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \left|x - t^2\right|\,dt$.