

Tentamen i Envariabelanalys 1

2020-01-19 kl. 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n - 1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$). Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida, där även tid för tentamensvisning meddelas när resultaten är klara.

1. Beräkna följande obestämda integraler:

$$(a) \int x e^{3x} dx \quad (b) \int \frac{e^x}{4 - e^{2x}} dx \quad (c) \int \cos x \sin 2x dx.$$

2. Undersök gränsvärdena

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{-x^2 + 4x - 3}$$
$$(b) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 + 2\sqrt{x}} - \sqrt{1 + 3\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$
$$(c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} + e^{3 + \ln x}}{\sqrt{x^2 + \ln x}}.$$

3. Skissa grafen för funktionen $f(x) = \arctan(x - 4) + \arctan \frac{1}{x}$, $x > 0$. Ange alla eventuella lodräta och vågräta asymptoter samt lokala extrempunkter.

4. Beräkna den generaliserade integralen $\int_4^\infty \frac{dx}{\sqrt{x} + x + x\sqrt{x}}$ (eller visa divergens).

5. Ange, för alla reella värden på konstanten k , antalet lösningar till ekvationen

$$(x^3 - 6x^2 + 9x) \ln x - \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 9x = k.$$

6. Vilken är den största möjliga arean av en cirkelsektor med omkrets L ?
(Här anses *inte* en hel cirkelskiva vara en cirkelsektor.)



7. Antag att f är inverterbar och deriverbar på \mathbf{R} . Antag vidare att $a, b \in \mathbf{R}$ uppfyller $f'(a) = 0$ och $f(a) = b$. Visa att f^{-1} inte är deriverbar i b .