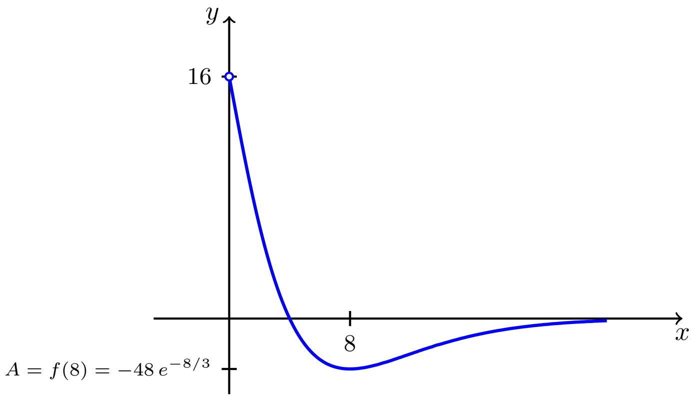
Lösningsskisser för TATA41 2020-03-25

1. Låt $f(x) = (16 - x^2)e^{-x/3}$ (för $x > 0$, eftersom det bara frågades efter *positiva* lösningar till ekvationen $f(x) = k$). Derivering ger

$$f'(x) = (-2x)e^{-x/3} + (16 - x^2)(-1/3)e^{-x/3} = \tfrac{1}{3}(x+2)(x-8)e^{-x/3},$$

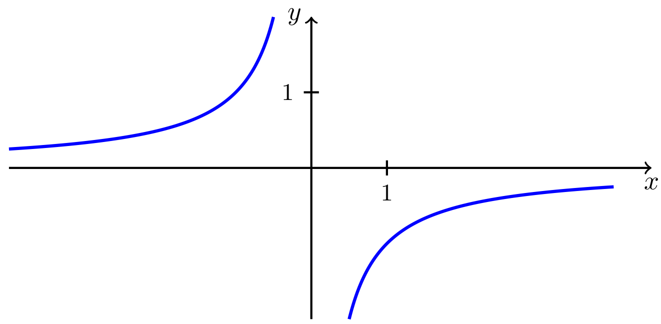
så derivatan är negativ för $0 < x < 8$ och positiv för $8 < x$. Vidare gäller uppenbart att $f(x) \to 16$ då $x \to 0^+$, och $f(x) = \frac{16}{(e^{1/3})^x} - \frac{x^2}{(e^{1/3})^x} \to 0$ då $x \to \infty$ enligt standardgränsvärdet $\lim_{x\to\infty} \frac{x^b}{a^x} = 0$ (för $a > 1$).

Vi kan nu rita grafen $y = f(x)$, $x > 0$, och läsa av svaret därifrån:

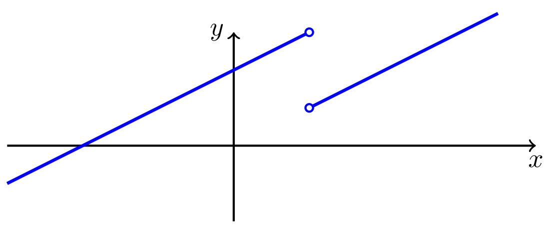


Svar: Låt $A = -48\,e^{-8/3}$. Ekvationen har två stycken positiva lösningar om $A < k < 0$, en positiv lösning om $k = A$ eller $0 \le k < 16$, och inga positiva lösningar om $k < A$ eller $k \ge 16$.

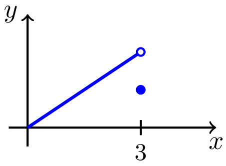
2. (a) T.ex. $f(x) = -1/x$ för $x \neq 0$. Den funktionen är inte växande, eftersom $f(a) > f(b)$ om $a < 0 < b$.

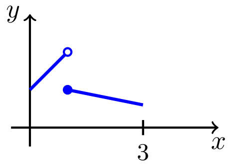


Ett sådant här exempel funkar också:

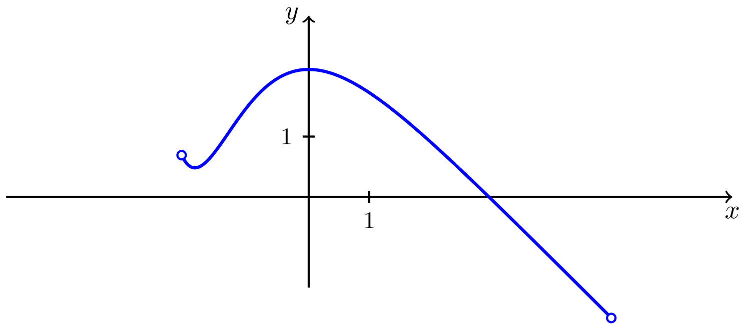


(b) En sådan funktion måste vara diskontinuerlig (pga. satsen om största och minsta värde). Här är ett par exempel på hur den kan se ut:





(c) Grafen måste se ut något i den här stilen, sånär som på att den kan förskjutas uppåt eller nedåt genom addition av en godtycklig konstant:



Svar: Se ovan.

3. (a) $f'(x) = 3\,e^{3x}$, eftersom

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{e^{3(x+h)}-e^{3x}}{h} = 3\,e^{3x}\cdot\frac{e^{3h}-1}{3h} \to 3\,e^{3x}\cdot 1$$

då $h \to 0$, enligt standardgränsvärdet $\lim\limits_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t} = 1$.

(b) $f'(x) = x/\sqrt{x^2+1}$, eftersom

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\sqrt{(x+h)^2+1}-\sqrt{x^2+1}}{h} \\ &= \frac{(x^2+2xh+h^2+1)-(x^2+1)}{h\Big(\sqrt{(x+h)^2+1}+\sqrt{x^2+1}\Big)} \\ &= \frac{2x+h}{\sqrt{(x+h)^2+1}+\sqrt{x^2+1}} \\ &\to \frac{2x+0}{\sqrt{(x+0)^2+1}+\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\end{aligned}$$

då $h \to 0$.

(c) $f'(x) = 4/(2-x)^2$, eftersom

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{2(x+h)}{2-(x+h)}-\frac{2x}{2-x}}{h} &= 2\cdot\frac{(x+h)(2-x)-x(2-x-h)}{h(2-x-h)(2-x)} \\ &= 2\cdot\frac{2}{(2-x-h)(2-x)} \to 2\cdot\frac{2}{(2-x)(2-x)}\end{aligned}$$

då $h \to 0$.

Svar: Se ovan.

4. (a) Partiell integration ger

$$\int_2^4 \sqrt{t}\,\cos t\,dt = \Big[\sqrt{t}\,\sin t\Big]_2^4 - \int_2^4 \frac{1}{2\sqrt{t}}\,\sin t\,dt = 2\sin 4 - \sqrt{2}\,\sin 2 - \frac{B}{2}.$$

(b) Variabelbytet $x = \sqrt{t}$ (med $t = x^2$ och $dx = dt/2\sqrt{t}$) ger

$$\int_1^2 \sin(x^2)\,dx = \int_1^4 \sin t\,\frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\left(\int_1^2 \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt + \int_2^4 \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt\right) = \frac{A+B}{2}.$$

(c) Variabelbytet $x = -y$ (med $dx = -dy$) ger

$$\int_{-2}^{-1} \sin(x^2)\,dx = -\int_2^1 \sin\big((-y)^2\big)\,dy = \int_1^2 \sin(y^2)\,dy = \frac{A+B}{2}$$

(där den sista likheten visades i (b) ovan.)
Annorlunda uttryckt: symmetrin i problemet, där integranden $\sin(x^2)$ är en jämn funktion, gör att svaret i (c) måste vara samma som i (b).
Alternativt kan man använda variabelbytet $x = -\sqrt{t}$ (med $t = x^2$ och $dx = -dt/2\sqrt{t}$), vilket ger

$$\int_{-2}^{-1} \sin(x^2)\,dx = \int_4^1 \sin t\,\frac{(-1)\,dt}{2\sqrt{t}} = \int_1^4 \sin t\,\frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{A+B}{2}.$$

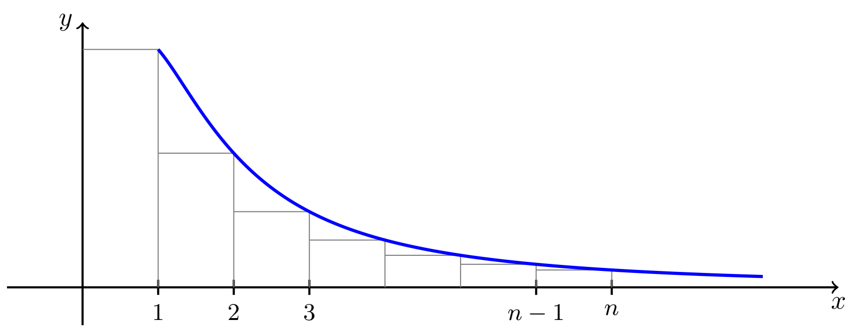
Svar: Se ovan.

5. Låt $f(x) = \dfrac{\arctan x}{x^2} = \arctan x \cdot \dfrac{1}{x^2}$. Derivatan är negativ för $x > 1$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{1}{x^2} + \arctan x \cdot \frac{-2}{x^3} = \underbrace{\frac{1}{x^3}}_{>0}\Bigg(\underbrace{\frac{x}{1+x^2}}_{<\frac{x^2}{1+x^2}<1} - \underbrace{2\underbrace{\arctan x}_{>\pi/4}}_{>\pi/2>1}\Bigg) < 0.$$

(Man kan t.o.m. visa att $f'(x) < 0$ för alla $x > 0$, inte bara för $x > 1$, men detta kräver lite mera jobb, t.ex. undersökning av $g(x) = \frac{x}{1+x^2} - 2\arctan x$ med hjälp av $g'(x)$.)

Alltså är f avtagande (och uppenbart positiv) på $[1, \infty[$, så vi kan argumentera med hjälp av en sådan här skiss:



Som förberedelse beräknar vi primitiv funktion till f, med hjälp av partiell integration och partialbråksuppdelning:

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \int \frac{1}{x^2}\cdot \arctan x\,dx = \frac{-1}{x}\cdot \arctan x - \int \frac{-1}{x}\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx \\ &= -\frac{\arctan x}{x} + \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right)dx \\ &= -\frac{\arctan x}{x} + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.\end{aligned}$$

Olikheten som ska visas är uppenbart sann för $n=1$, och för $n \geq 2$ fås

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} f(k) &= f(1) + \sum_{k=2}^{n} f(k) \\ &< f(1) + \int_1^n f(x)\,dx \qquad \text{(enl. fig. ovan)} \\ &< f(1) + \int_1^\infty f(x)\,dx \qquad \text{(eftersom } f(x)>0 \text{ för } x \geq 1) \\ &= \frac{\pi/4}{1^2} + \lim_{\omega\to\infty}\left[-\frac{\arctan x}{x} + \frac{1}{2}\ln(x^2) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_1^\omega \\ &= \frac{\pi}{4} + \lim_{\omega\to\infty}\left(-\frac{\arctan\omega}{\omega} - \frac{1}{2}\ln(\omega^{-2}+1)\right) - \left(-\frac{\pi/4}{1} - \frac{1}{2}\ln 2\right) \\ &= \frac{\pi}{4} + (-0-0) + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{\pi + \ln 2}{2},\end{aligned}$$

vilket skulle visas.

6. Från $\frac{d}{dx}x^2 = 2x$ och $\frac{d}{dx}\frac{1}{x} = \frac{-1}{x^2}$ följer det att tangentlinjernas ekvationer är

$$y = a^2 + 2a(x-a) = 2ax - a^2$$

resp.

$$y = \frac{-1}{a} + \frac{-1}{(-a)^2}\big(x-(-a)\big) = \frac{-x}{a^2} - \frac{2}{a}.$$

Linjerna skär varandra i punkten $P=(x_0,y_0)$, där

$$2ax_0 - a^2 = \frac{-x_0}{a^2} - \frac{2}{a} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_0 = \frac{a^2 - \frac{2}{a}}{2a + \frac{1}{a^2}} = \frac{a(a^3-2)}{2a^3+1},$$

och skärningspunktens y-koordinat blir därmed

$$y_0 = 2ax_0 - a^2 = 2a\cdot\frac{a(a^3-2)}{2a^3+1} - a^2 = \frac{-5a^2}{2a^3+1}.$$

Frågan gällde vilka värden y_0 kan anta, för $a>0$. Derivering ger

$$\frac{dy_0}{da} = \frac{d}{da}\frac{-5a^2}{2a^3+1} = \frac{10a(a^3-1)}{(2a^3+1)^2},$$

vilket är negativt för $0<a<1$ och positivt för $1<a$, så y_0:s minsta värde är $y_0 = -5/3$ då $a=1$. Dessutom går y_0 mot noll både då $a\to 0^+$ och då $a\to\infty$.

Svar: Skärningspunktens y-koordinat kan anta alla värden i intervallet $[-\frac{5}{3}, 0[$.