Lösningsskisser för TATA41 2020-06-08

1. Räkningarna blir en aning enklare ifall man skriver $\frac{1}{2} + \frac{1}{2x}$ istället för $\frac{x+1}{2x}$, dvs.

$$f(x) = 2\arctan 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2x}, \qquad x \neq 0.$$

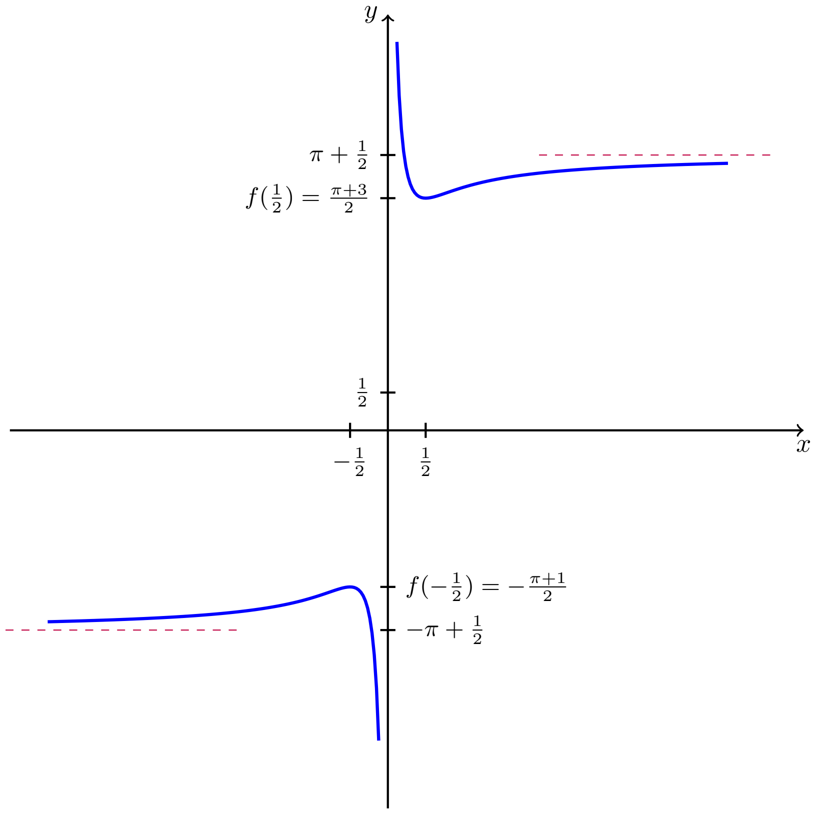
Då slipper man kvotregeln när man deriverar:

$$f'(x) = \frac{4}{1+(2x)^2} + 0 + \frac{-1}{2x^2} = \frac{8x^2 - (1+4x^2)}{2x^2(1+4x^2)} = \frac{(2x+1)(2x-1)}{2x^2(1+4x^2)}.$$

x		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$	
$2x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$2x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$2x^2(1+4x^2)$	$+$		$+$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	ej def.	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	ej def.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Även de relevanta gränsvärdena blir ganska uppenbara om man har gjort den ovanstående omskrivningen: $f(x) \to \pm\infty$ då $x \to 0^{\pm}$ och $f(x) \to \pm\pi + \frac{1}{2}$ då $x \to \pm\infty$.

Grafen $y = f(x)$ ser alltså ut såhär:



(Man kan notera att $f(x) - \frac{1}{2} = 2\arctan 2x + \frac{1}{2x}$ är en udda funktion, så f:s graf måste vara symmetrisk med avseende på 180 graders rotation kring punkten $(0, \frac{1}{2})$.)

Svar: Se graf ovan. Linjen $x = 0$ är en lodrät asymptot, och linjerna $y = \frac{1}{2} \pm \pi$ är vågräta asymptoter. Funktionen har lokalt maximum $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{\pi+1}{2}$ och lokalt minimum $f(\frac{1}{2}) = \frac{\pi+3}{2}$.

2. (a) Vi bryter ut den dominerande termen inuti respektive logaritm, och använder logaritmlagar:

$$\frac{\ln(x^2+x^4)}{\ln(x^5+x^6)} = \frac{\ln(x^4(x^{-2}+1))}{\ln(x^6(x^{-1}+1))} = \frac{\ln|x|^4+\ln(x^{-2}+1)}{\ln|x|^6+\ln(x^{-1}+1)}$$
$$= \frac{4\ln|x|+\ln(x^{-2}+1)}{6\ln|x|+\ln(x^{-1}+1)} = \frac{4+\frac{1}{\ln|x|}\cdot\ln(x^{-2}+1)}{6+\frac{1}{\ln|x|}\cdot\ln(x^{-1}+1)} \to \frac{4+0\cdot 0}{6+0\cdot 0} = \frac{2}{3}$$

då $x \to -\infty$.

(Observera absolutbeloppstecknen, som vi kan infoga eftersom $x^k = |x|^k$ när k är ett jämnt heltal. Vi behöver detta göra detta eftersom x ska gå mot *minus* oändligheten, för identiteten $\ln(x^k) = k\ln x$ gäller ju bara om x är *positivt*. Alternativt kan man slippa undan denna problematik genom att från början sätta $x = -t$, där $t \to +\infty$.)

(b) Då $x \to 0$ får vi från standardgränsvärden att

$$\frac{x(e^{\sin 3x}-1)}{\big(\ln(1+2x)\big)^2} = \frac{e^{\sin 3x}-1}{\sin 3x}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\left(\frac{2x}{\ln(1+2x)}\right)^2\cdot\frac{3}{4} \to 1\cdot 1\cdot 1^2\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{4}.$$

(c) Standardgränsvärdena $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$ och $\lim_{x\to 0^+} x^a \ln x = 0$ (för $a > 0$) ger

$$\sin\sqrt{x}\cdot\ln x = \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot x^{1/2}\ln x \to 1\cdot 0 = 0 \qquad \text{då } x \to 0^+.$$

(Notera att det *inte* räcker som motivering att bara säga att $\sin\sqrt{x} \to 0$, för den andra faktorn $\ln x$ går ju mot $-\infty$, och gränsvärden av typ "$0\cdot(-\infty)$" behöver inte bli noll i allmänhet.)

Svar: (a) 2/3 (b) 3/4 (c) 0.

3. (a) Bytet $t = 3x$ (och $dt = 3\,dx$) samt summa- till produktomskrivning (t.ex. med hjälp av Eulers formler) ger $\int \cos^4 3x\,dx = \frac{1}{3}\int \cos^4 t\,dt = \frac{1}{3}\int \frac{1}{8}(\cos 4t + 4\cos 2t + 3)dt = \frac{1}{24}(\frac{1}{4}\sin 4t + 2\sin 2t + 3t) + C = \frac{1}{96}\sin 12x + \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{3}{8}x + C$.

(b) För $a = 3$ är $\int \frac{dx}{(x-3)(a-x)} = \int \frac{-dx}{(x-3)^2} = \frac{1}{x-3} + C$. För $a \neq 3$ finner man med partialbråksuppdelning att $\int \frac{dx}{(x-3)(a-x)} = \frac{1}{a-3}\int\left(\frac{1}{x-3}+\frac{1}{a-x}\right)dx = \frac{1}{a-3}\big(\ln|x-3| - \ln|a-x|\big) + C = \frac{1}{a-3}\ln\left|\frac{x-3}{a-x}\right| + C$.

Svar: Se ovan.

4. Skriv olikheten som $9\arctan(x/3) - \ln(1+3x) \le a$, och kalla vänsterledet för $f(x)$. Derivering ger

$$f'(x) = 9\cdot\frac{1/3}{1+(x/3)^2} - \frac{3}{1+3x} = \frac{27}{9+x^2} - \frac{3}{1+3x} = \frac{3x(27-x)}{(1+3x)(9+x^2)},$$

vilket är positivt för $0 < x < 27$ och negativt för $27 < x$. Det största värdet som $f(x)$ antar för $x \ge 0$ är därmed $f(27) = 9\arctan 9 - \ln 82$, och detta är därmed det minsta värdet på a sådant att olikheten $f(x) \le a$ är uppfylld för alla $x \ge 0$.

Svar: $a = 9\arctan 9 - \ln 82$.

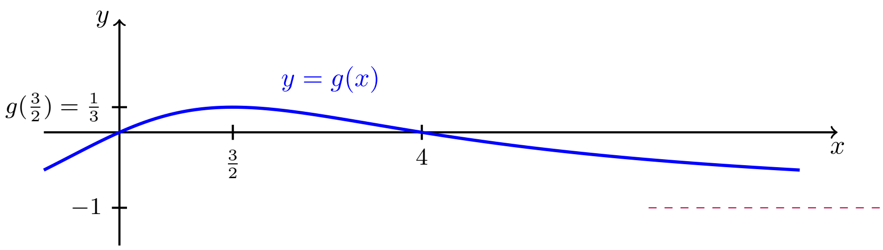
5. Rektangelns sidlängder är x och $|f(x)|$, så dess area är

$$A(x) = x \cdot |f(x)| = |x \cdot f(x)| = \left| \frac{x(4-x)}{x^2+9} \right|, \qquad x > 0, \quad x \neq 4.$$

Låt oss undersöka uttrycket innanför beloppstecknen, $g(x) = \frac{x(4-x)}{x^2+9} = \frac{4x-x^2}{x^2+9}$. Vi ser att $g(x) = \frac{4x^{-1}-1}{1+9x^{-2}} \to \frac{0-1}{1+0} = -1$ då $x \to \infty$ (så att linjen $y = -1$ är en vågrät asymptot). Derivatan är, enligt kvotregeln,

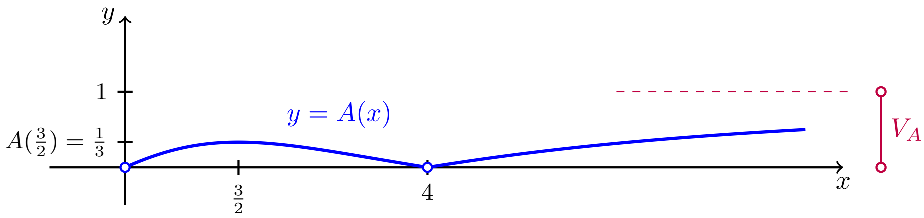
$$g'(x) = \frac{(4-2x)\cdot(x^2+9) - (4x-x^2)\cdot 2x}{(x^2+9)^2} = \frac{-4(x+6)(x-\frac{3}{2})}{(x^2+9)^2},$$

så med hjälp av en enkel teckentabell (ej utskriven här) kan vi rita grafen $y = g(x)$:



(Här har vi tagit med lite av kurvan för $x \leq 0$, men det är egentligen ointressant i detta sammanhang.)

Grafen för funktionen som beskriver rektangelarean, $y = A(x) = |g(x)|$, fås genom att "vända upp" de bitar av grafen $y = g(x)$ som ligger nedanför x-axeln, och här bör vi vara lite noggrannare och bara ta med $x > 0$, $x \neq 4$. Den sökta värdemängden V_A avläses sedan lätt ur denna figur; notera speciellt att $A(x) \to |-1| = 1$ då $x \to \infty$, och att $A(\frac{3}{2}) = \frac{1}{3}$ är mindre än 1.



Svar: Rektangelns area kan anta alla värden i intervallet $]0,1[$.

6. (a) Variabelbytena $t = x^2 - 4$, $x\,dx = dt/2$ och $s = \sqrt{3}\,t$, $dt = ds/\sqrt{3}$ ger

$$\int_2^{\omega} x \sin\big(3(x^2-4)^2\big)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\omega^2-4} \sin(3t^2)\,dt = \frac{1}{2\sqrt{3}}\int_0^{\sqrt{3}\,(\omega^2-4)} \sin(s^2)\,ds,$$

så när $\omega \to \infty$ erhålls

$$\int_2^{\infty} x \sin\big(3(x^2-4)^2\big)dx = \frac{1}{2\sqrt{3}}\int_0^{\infty} \sin(s^2)\,ds = \frac{\alpha}{2\sqrt{3}}.$$

(b) Partiell integration, med hjälp av $2x\sin(x^2) = \frac{d}{dx}(-\cos(x^2))$, ger

$$\begin{aligned}\int_0^{\omega} x^2 \sin(x^2)dx &= \int_0^{\omega} \frac{x}{2}\cdot 2x\sin(x^2)dx \\ &= \Big[\frac{x}{2}\cdot(-\cos(x^2))\Big]_0^{\omega} - \int_0^{\omega} \frac{1}{2}\cdot(-\cos(x^2))\,dx \\ &= \underbrace{-\frac{\omega}{2}\cos(\omega^2)}_{\text{saknar gränsvärde}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^{\omega}\cos(x^2)\,dx}_{\to \beta/2 \text{ då } \omega \to \infty}\end{aligned}$$

Eftersom den första termen saknar gränsvärde då $\omega \to \infty$ och den andra termen har det, så kommer hela uttrycket att sakna gränsvärde, dvs. $\lim_{\omega\to\infty}\int_0^{\omega} x^2\sin(x^2)dx$ existerar ej, dvs. $\int_0^{\infty} x^2\sin(x^2)dx$ är divergent, vilket skulle visas.