Lösningsskisser för TATA41 2020-08-25 (förmiddag)

1. (a) Upprepad partiell integration ger $\int \sin(3x)\cdot x^2\,dx = \frac{-\cos(3x)}{3}\cdot x^2 - \frac{-\sin(3x)}{9}\cdot 2x + \frac{\cos(3x)}{27}\cdot 2 + C = \frac{2-9x^2}{27}\cos(3x) + \frac{2x}{9}\sin(3x) + C$.

   (b) Partialbråksuppdelning, följt av bytet $t = x+1$ (med $dt = dx$), ger $\int \frac{x^2+3x+10}{x^3+2x^2+10x}\,dx = \int \big(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2+2x+10}\big)dx = \ln|x| + \int \frac{dt}{t^2+9} = \ln|x| + \frac{1}{9}\int \frac{dt}{1+(t/3)^2} = \ln|x| + \frac{1}{3}\arctan(t/3) + C = \ln|x| + \frac{1}{3}\arctan\frac{x+1}{3} + C$.

   (c) Med $t = \sqrt{1+x}$ (och därmed $x = t^2-1$, $dx = 2t\,dt$) fås $\int \frac{\sqrt{1+x}}{2+x}\,dx = \int \frac{t}{2+(t^2-1)}\,2t\,dt = 2\int \big(1 - \frac{1}{t^2+1}\big)dt = 2\big(t - \arctan t\big) + C = 2\big(\sqrt{1+x} - \arctan\sqrt{1+x}\big) + C$.

   Svar: Se ovan.

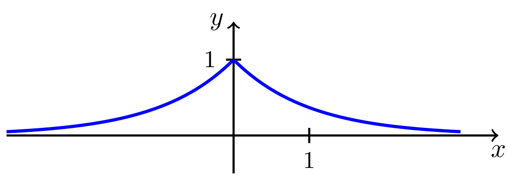
2. (a) $\frac{x^2-4x+4}{x^2-x-2} = \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+1)} = \frac{x-2}{x+1} \to \frac{0}{3} = 0$ då $x \to 2$.

   (b) $\frac{\ln(e^x+e^{2x})}{\sqrt{x^2+\ln x}} = \frac{\ln(e^{2x}(e^{-x}+1))}{\sqrt{x^2(1+\frac{\ln x}{x^2})}} = [\text{för } x>0] = \frac{2x+\ln(e^{-x}+1)}{x\sqrt{1+\frac{\ln x}{x^2}}} = \frac{2+\frac{1}{x}\ln(e^{-x}+1)}{\sqrt{1+\frac{\ln x}{x^2}}} \to \frac{2+0\cdot\ln 1}{\sqrt{1+0}} = 2$ då $x \to \infty$, enligt standardgränsvärden.

   (c) $\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{e^{2x}-e^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(\pi(1+t))}{e^{2(1+t)}-e^2} = \frac{-\pi}{2e^2}$, eftersom $\frac{\sin(\pi+\pi t)}{e^{2+2t}-e^2} = \frac{-\sin(\pi t)}{e^2(e^{2t}-1)} = \frac{-\pi}{2e^2}\cdot\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\cdot\frac{2t}{e^{2t}-1} \to \frac{-\pi}{2e^2}\cdot 1\cdot 1$ då $t\to 0$, enligt standardgränsvärden.

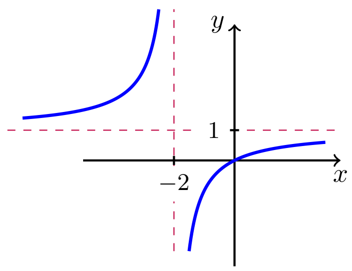
   Svar: (a) 0 (b) 2 (c) $-\dfrac{\pi}{2e^2}$.

3. (a) Enklaste sättet att tänka: Det är bara att rita $y = e^x$ för $x \le 0$ (växande) och $y = e^{-x}$ för $x \ge 0$ (avtagande).



   Egenskaper som bör synas i figuren (och ev. kommenteras): Jämn funktion. Globalt maximum $f(0) = 1$. Funktionen f är inte deriverbar i $x = 0$, eftersom höger- och vänsterderivatorna är olika ($f'_\pm(0) = \mp 1$ för att vara exakt). Linjen $y = 0$ är en vågrät asymptot till grafen $y = f(x)$, eftersom $f(x) \to 0$ då $x \to \pm\infty$.

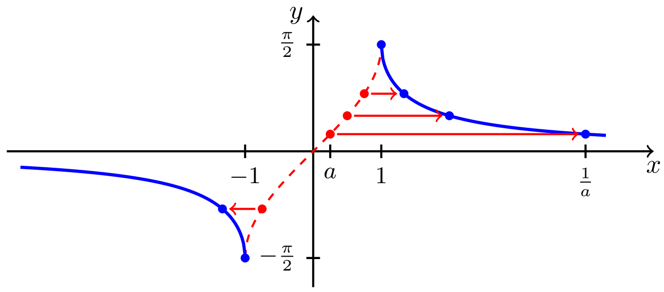
   (b) Derivatan $g'(x) = \frac{2}{(x+2)^2}$ visar att g är strängt växande på intervallen $x < -2$ och $x > -2$. Eller så kan man göra polynomdivision, $g(x) = 1 - \frac{2}{x+2}$; denna omskrivning visar att grafen $y = g(x)$ fås genom att flytta kurvan $y = -2/x$ två steg åt vänster och ett steg uppåt, och kurvan $y = -2/x$ ser ju i sin tur ut som $y = 1/x$, bara vänd upp och ner och omskalad med en faktor 2 i y-led:



   Egenskaper som bör synas i figuren (och ev. kommenteras): Linjen $x = -2$ är en lodrät asymptot och linjen $y = 1$ är en vågrät asymptot. Lokala extrempunkter saknas. Kurvan går genom $(0,0)$, och $x=0$ är g:s enda nollställe.

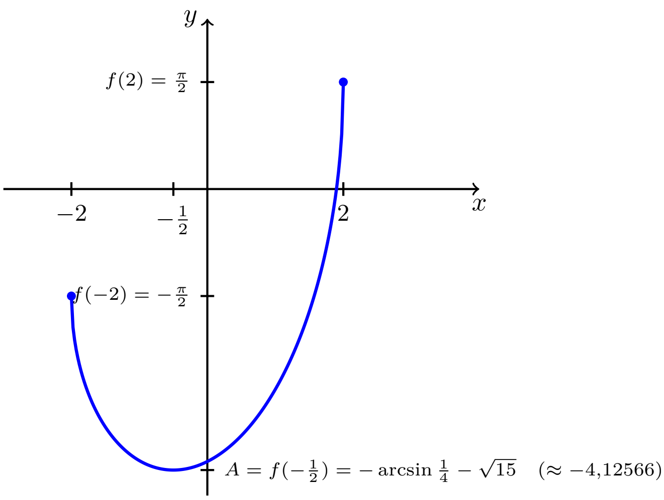
(Övriga heltalspunkter på kurvan är $(-1,-1)$, $(-3,3)$ och $(-4,2)$.)

(c) Enklaste sättet att tänka är antagligen att utgå från den kända grafen $y = \arcsin x$ (den röda streckade kurvan i figuren nedan) och flytta värdet i punkten $x = a$ till $x = 1/a$ istället (för varje tal a sådant att $0 < |a| \le 1$).



Egenskaper som bör synas i figuren (och ev. kommenteras): Udda funktion. Definitionsmängd $D_h = \{x \in \mathbf{R} : |x| \ge 1\}$. Globalt maximum $h(1) = \pi/2$, globalt minimum $h(-1) = -\pi/2$. Linjen $y = 0$ är en vågrät asymptot, eftersom $h(x) \to 0$ då $x \to \pm\infty$ (man kan notera att $h(x) \approx 1/x$ för stora värden på $|x|$). Lodräta asymptoter saknas (men grafen har lodrät tangentlinje i punkterna $\pm(1, \pi/2)$).

4. Låt $f(x) = \arcsin(x/2) - 2\sqrt{4-x^2}$, för $-2 \le x \le 2$. Derivering ger $f'(x) = \frac{1/2}{\sqrt{1-(x/2)^2}} - 2 \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{1+2x}{\sqrt{4-x^2}}$ för $-2 < x < 2$, så derivatan är negativ för $-2 < x < -\frac{1}{2}$ och positiv för $-\frac{1}{2} < x < 2$. Eftersom f är kontinuerlig ut i ändpunkterna $x = \pm 2$, så är f strängt avtagande på intervallet $-2 \le x \le -\frac{1}{2}$ och strängt växande på intervallet $-\frac{1}{2} \le x \le 2$. Vi kan nu rita grafen $y = f(x)$, och läsa av antalet lösningar till ekvationen $f(x) = k$ för olika värden på k:



Svar: Låt $A = -\arcsin\frac{1}{4} - \sqrt{15}$. Ekvationen har två stycken lösningar om $A < k \le -\frac{\pi}{2}$, en lösning om $k = A$ eller $-\frac{\pi}{2} < k \le \frac{\pi}{2}$, och inga lösningar för övriga reella värden på k.

5. (a) Den aktuella integralen $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^3}$ är generaliserad i origo, så den räknas (per definition) som konvergent om och endast om båda integralerna $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^3}$ och $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^3}$ konvergerar. Men $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^3}$ är divergent, eftersom $\int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x^3} = \left[\frac{-1}{2x^2}\right]_{\varepsilon}^{1} \to \infty$ då $\varepsilon \to 0^+$. Alltså är även $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^3}$ divergent.

(b) Vi beräknar först den primitiva funktionen

$$\begin{aligned}\int \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) dx &= x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \int x \cdot \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}\, dx \\ &= x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \int \frac{1}{x+1}\, dx \\ &= x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \ln|x+1| + C.\end{aligned}$$

Detta ger (för $\omega > 1$)

$$\begin{aligned}\int_1^{\omega} \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right) dx &= \left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \ln(x+1) - \ln x\right]_1^{\omega} \\ &= \frac{\ln(1+\frac{1}{\omega})}{\frac{1}{\omega}} + \ln(1+\tfrac{1}{\omega}) - 2\ln 2.\end{aligned}$$

Alltså, med hjälp av variabelbytet $t = 1/\omega$ och ett standardgränsvärde,

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right) dx &= \lim_{\omega\to\infty}\left(\frac{\ln(1+\frac{1}{\omega})}{\frac{1}{\omega}} + \ln(1+\tfrac{1}{\omega}) - 2\ln 2\right) \\ &= \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{\ln(1+t)}{t} + \ln(1+t) - 2\ln 2\right) \\ &= 1 + 0 - 2\ln 2.\end{aligned}$$

Svar: (a) Divergent (b) $1 - 2\ln 2$.

6. Låt $f(x) = x(\frac{1}{2} + \ln x)$. Denna funktion är uppenbart strängt växande på intervallet $x \geq 1$, eftersom den där är en produkt av två positiva strängt växande faktorer. Summan $\sum_{k=2}^{n} f(k)$ är därmed en översumma till integralen $\int_1^n f(x)\, dx$, vilket lämpligen inses genom att rita en figur.

Detta ger, för godtyckligt heltal $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} f(k) &= f(1) + \sum_{k=2}^{n} f(k) \geq f(1) + \int_1^n f(x)\, dx \\ &= \frac{1}{2} + \int_1^n x\left(\frac{1}{2} + \ln x\right) dx = \cdots = \frac{1}{2} + \left[\frac{x^2 \ln x}{2}\right]_1^n = \frac{1}{2}\left(1 + n^2 \ln n\right),\end{aligned}$$

vilket skulle visas. (När $n = 1$ tolkas $\sum_{k=2}^{n}$ som noll, en ”tom summa”.)

7. Det finns naturligtvis inte bara ett korrekt svar på denna uppgift. Observera att skrivsättet $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ innebär att funktionens definitionsmängd ska vara $D_f = \mathbf{R}$, dvs. för att ett exempel ska vara korrekt krävs till att börja med att funktionen måste vara definierad för alla reella tal.

   (a) T.ex. $f(x) = \sin(x^2)$, $x \in \mathbf{R}$.
   Denna funktion är begränsad eftersom $|f(x)| \le 1$ för alla x, men derivatan $f'(x) = 2x\cos(x^2)$ är obegränsad, eftersom talföljden $f'(\sqrt{2\pi n}) = 2\sqrt{2\pi n}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ går mot oändligheten.

   (b) T.ex. $f(x) = x$, $x \in \mathbf{R}$.
   Detta är uppenbart en obegränsad funktion, och derivatan $f'(x) = 1$ är lika uppenbart begränsad.

   (c) T.ex. $f(x) = \int_0^x 2\,|t|\,dt = \operatorname{sgn}(x)x^2 = x\,|x|$, $x \in \mathbf{R}$.
   Integranden är kontinuerlig på $\mathbf{R}$, så $f'(x) = 2\,|x|$ för alla $x \in \mathbf{R}$ enligt analysens huvudsats, och det är välkänt att $2\,|x|$ inte är deriverbar i origo, så $f''(0)$ existerar inte.