Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Utbildningskod: TATA41
Modul: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 1

2020-08-25 kl. 8.00–13.00

Inga hjälpmedel är tillåtna, förutom att ritverktyg får användas, t.ex. passare, linjal, gradskiva (utan formler). Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$). Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida, där även tid för tentamensvisning meddelas när resultaten är klara.

1. Beräkna

   (a) $\displaystyle\int x^2 \sin(3x)\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{x^2+3x+10}{x^3+2x^2+10x}\,dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x}}{2+x}\,dx.$

2. Undersök följande gränsvärden:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4x+4}{x^2-x-2}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(e^x+e^{2x})}{\sqrt{x^2+\ln x}}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{e^{2x}-e^2}.$

3. Rita grafen för följande funktioner:

   (a) $f(x) = e^{-|x|}$ (b) $g(x) = \dfrac{x}{x+2}$ (c) $h(x) = \arcsin(1/x).$

   Svara med tydliga figurer där alla relevanta egenskaper framgår. Uträkningar behöver ej redovisas i denna uppgift.

4. Ange antalet lösningar till ekvationen $\arcsin(x/2) - 2\sqrt{4-x^2} = k$ för varje värde på parametern $k \in \mathbf{R}$.

5. Beräkna (eller visa divergens):

   (a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^3}$ (1p) (b) $\displaystyle\int_1^\infty \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right)dx$ (2p)

6. Visa att $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(\tfrac{1}{2} + \ln k) \geq \tfrac{1}{2}(1 + n^2 \ln n)$ för alla heltal $n \geq 1$.

7. Ge exempel på följande:

   (a) En begränsad och deriverbar funktion $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sådan att f' är obegränsad.
   (b) En obegränsad och deriverbar funktion $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sådan att f' är begränsad.
   (c) En deriverbar funktion $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sådan att $f''(0)$ inte existerar.