Lösningsskisser för TATA41 2020-08-25 (eftermiddag)

1. (a) Partialbråksuppdelning, följt av bytet $t = x + 2$ (med $dt = dx$), ger $\int \frac{2x+5}{x^3+4x^2+5x}\,dx = \int\left(\frac{1}{x} + \frac{-x-2}{x^2+4x+5}\right)dx = \ln|x| - \int \frac{t\,dt}{t^2+1} = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + C = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5) + C$.

   (b) Variabelbytet $t = \cos x$ (med $dt = -\sin x\,dx$), följt av partiell integration, ger $\int e^{\cos x}\sin(2x)dx = 2\int e^{\cos x}\cos x \sin x\,dx = -2\int t\,e^t\,dt = \cdots = -2(t-1)e^t + C = 2(1-\cos x)e^{\cos x} + C$.

   (c) Bytet $t = x + 1$ leder till en standardprimitiv: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \ln\left|t + \sqrt{t^2+1}\right| + C = \ln\left|x + 1 + \sqrt{x^2+2x+2}\right| + C$.

   (Beloppstecknen är egentligen överflödiga här, eftersom $\sqrt{t^2+1} > \sqrt{t^2} = |t| \geq -t$, så att $t + \sqrt{t^2+1}$ alltid är positivt; med denna motivering kan man alltså även svara $\ln(x + 1 + \sqrt{x^2+2x+2}) + C$, med parenteser istället för beloppstecken.)

   Svar: Se ovan.

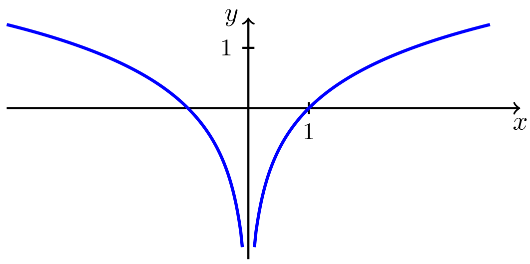
2. (a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{3x^2-4x+1}{\ln x} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{3(1+t)^2-4(1+t)+1}{\ln(1+t)} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{3t^2+2t}{\ln(1+t)} = 2$, eftersom $\frac{3t^2+2t}{\ln(1+t)} = \frac{t}{\ln(1+t)} \cdot (2+3t) \to 1 \cdot (2+0) = 2$ då $t \to 0$, enligt ett standardgränsvärde.

   (b) $\frac{2^x+x^2}{(x/2)^4+4^{x/2}} = \frac{2^x+x^2}{\frac{x^4}{16}+2^x} = \frac{1+\frac{x^2}{2^x}}{\frac{x^4}{16\cdot 2^x}+1} \to \frac{1+0}{0+1} = 1$ då $x \to \infty$, enligt ett standardgränsvärde ("exponentialfunktioner växer fortare än polynom").

   (c) $\frac{\ln(x^2)}{\ln(x+\sqrt{x})} = \frac{\ln x^2}{\ln\sqrt{x}+\ln(\sqrt{x}+1)} = \frac{2\ln x}{\frac{1}{2}\ln x+\ln(\sqrt{x}+1)} = \frac{2}{\frac{1}{2}+\frac{1}{\ln x}\cdot\ln(\sqrt{x}+1)} \to \frac{2}{\frac{1}{2}+0\cdot 0} = 4$ då $x \to 0^+$.

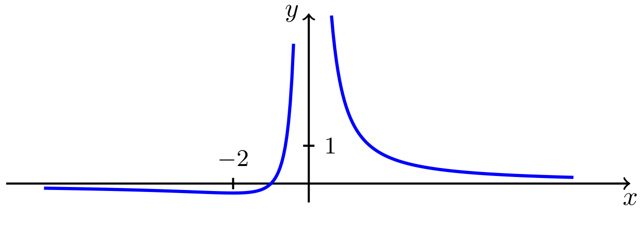
   Svar: (a) 2 (b) 1 (c) 4.

3. (a) För $x > 0$ ritas den välkända kurvan $y = \ln x$, och resten av f:s graf fås genom spegling i x-axeln, eftersom f är en jämn funktion, $f(-x) = f(x)$:



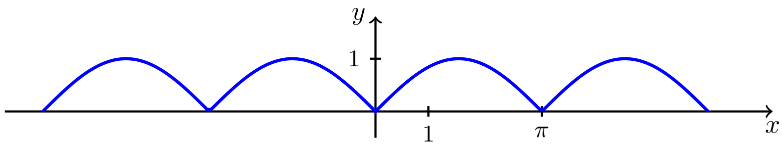
   Egenskaper som bör synas i figuren (och ev. kommenteras): Jämn funktion. Linjen $x = 0$ är en lodrät asymptot till grafen $y = f(x)$. Vågrät asymptot saknas; $f(x) \to \infty$ då $x \to \pm\infty$. Lokala extrempunkter saknas.

   (b) Derivatan $g'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{-2}{x^3} = \frac{-(x+2)}{x^3}$ visar att g är strängt avtagande på intervallen $x \leq -2$ och $x > 0$, samt strängt växande på intervallet $-2 \leq x < 0$.



   Egenskaper som bör synas i figuren (och ev. kommenteras): Globalt minimum $f(-2) = -1/4$. Linjen $x = 0$ är en lodrät asymptot och linjen $y = 0$ är en vågrät asymptot. Enda nollstället är $x = -1$ (vilket man enklast ser med omskrivningen $g(x) = \frac{x+1}{x^2}$).

(c) Eftersom $h(x) = \sqrt{\sin^2 x} = |\sin x|$ så är h:s graf en ”likriktad sinuskurva”:



Egenskaper som bör synas i figuren (och ev. kommenteras): Jämn funktion. Asymptoter saknas. Globala minima $h(n\pi) = 0$ ($n \in \mathbf{Z}$), där h inte är deriverbar. Globala maxima $h(\frac{\pi}{2} + n\pi) = 1$ ($n \in \mathbf{Z}$), där $h' = 0$.

4. Funktionen $f(x) = x \exp(x + \frac{2}{x})$ är definierad för alla $x \neq 0$, och har derivatan

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot \exp\left(x + \frac{2}{x}\right) + x \cdot \exp\left(x + \frac{2}{x}\right)\left(1 + \frac{-2}{x^2}\right) \\ &= \frac{(x+2)(x-1)\exp(x + \frac{2}{x})}{x}, \end{aligned}$$

också för $x \neq 0$. Detta ger följande teckentabell:

x		-2		0		1	
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\exp(x + \frac{2}{x})$	$+$		$+$	ej def.	$+$		$+$
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	ej def.	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	ej def.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Gränsvärden: $f(x) \to \infty$ då $x \to \infty$ (uppenbart), och även då $x \to 0^+$, eftersom variabelbytet $t = 1/x \to \infty$ ger

$$f(x) = x\, e^{2/x} \cdot e^x = \underbrace{\frac{e^{2t}}{t}}_{\to\infty} \cdot \underbrace{e^{1/t}}_{\to e^0 = 1 > 0} \to \infty,$$

enligt ett standardgränsvärde. Vidare gäller $f(x) \to 0$ då $x \to -\infty$, eftersom bytet $s = -x \to \infty$ ger

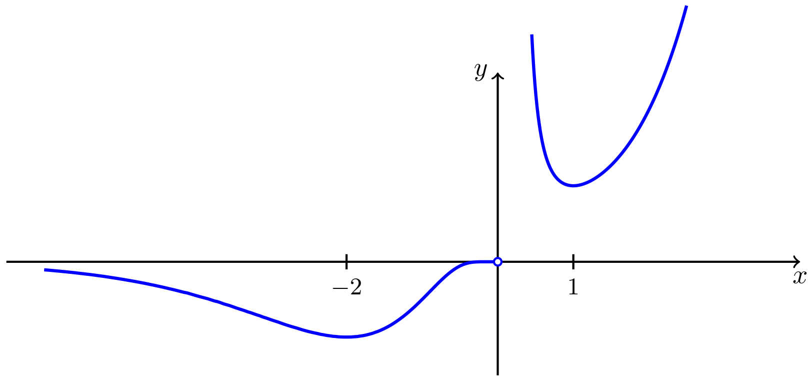
$$f(x) = x\, e^x \cdot e^{2/x} = -\underbrace{\frac{s}{e^s}}_{\to 0} \cdot \underbrace{e^{-2/s}}_{\to e^0 = 1} \to 0,$$

och även då $x \to 0^-$, eftersom

$$f(x) = x \cdot e^x \cdot e^{2/x} \to 0 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

(motivering för sista faktorn: $2/x \to -\infty$ då $x \to 0^-$, och $e^u \to 0$ då $u \to -\infty$).

Nu kan vi rita grafen. Det är dock svårt att göra en skalenlig bild som visar f:s uppförande, så i figuren nedan är värdena $f(x)$ för $x > 0$ dividerade med 20, medan värdena för $x < 0$ är multiplicerade med 10.



Svar: $x = -2$ och $x = 1$ är lokala minimipunkter för f (med tillhörande lokala minimivärden $f(-2) = -2e^{-3}$ resp. $f(1) = e^3$). Linjen $x = 0$ är en lodrät asymptot till grafen $y = f(x)$, och linjen $y = 0$ är en vågrät asymptot (då $x \to -\infty$).

5. (a) Den aktuella integralen $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$ är generaliserad i origo, så den räknas (per definition) som konvergent om och endast om båda integralerna $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2}$ och $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2}$ konvergerar. Men $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2}$ är divergent, eftersom $\int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x^2} = \left[\frac{-1}{x}\right]_{\varepsilon}^{1} \to \infty$ då $\varepsilon \to 0^+$. Alltså är även $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$ divergent.

   (b) Med $0 < \varepsilon < 1$ fås (t.ex. med variabelbytet $t = \ln(1 + 2x)$ för den första termen, eller direkt med igenkänning av inre derivator)

$$
\begin{aligned}
\int_{\varepsilon}^{1} \left(\frac{2}{(1+2x)\ln(1+2x)} - \frac{1}{x} \right) dx &= \Big[\ln\ln(1+2x) - \ln x \Big]_{\varepsilon}^{1} \\
&= \left[\ln\left(\frac{\ln(1+2x)}{x} \right) \right]_{\varepsilon}^{1} \\
&= \ln\left(\frac{\ln 3}{1}\right) - \ln\left(\frac{\ln(1+2\varepsilon)}{\varepsilon}\right) \\
&= \ln\ln 3 - \ln\left(2 \cdot \frac{\ln(1+2\varepsilon)}{2\varepsilon}\right) \\
&\to \ln\ln 3 - \ln(2 \cdot 1),
\end{aligned}
$$

   då $\varepsilon \to 0^+$, enligt ett standardgränsvärde.

Svar: (a) Divergent (b) $\ln\left(\dfrac{\ln 3}{2}\right)$.

6. Tangentlinjen till kurvan $y = e^{-x}$ i punkten $(x, y) = (a, e^{-a})$ (där $a \geq 0$) har lutningen $-e^{-a}$, och skär därmed x-axeln i punkten $(a + 1, 0)$ och y-axeln i punkten $(0, (a + 1)\, e^{-a})$. Triangeln i uppgiften har därmed arean $A(a) = \frac{1}{2}(a+1)^2\, e^{-a}$. Derivatan av detta uttryck är $A'(a) = \frac{1}{2}(a+1)(1-a)\, e^{-a}$, vilket är positivt för $0 \leq a < 1$ och negativt för $a > 1$. Detta visar att det största värdet som $A(a)$ kan anta för $a \geq 0$ är $A(1) = 2/e$.

Svar: Den största möjliga triangelarean är $2/e$.

7. Det finns naturligtvis inte bara ett korrekt svar på uppgift (a) och (b). Observera att skrivsättet $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ innebär att funktionens definitionsmängd ska vara $D_f = \mathbf{R}$, dvs. för att ett exempel ska vara korrekt krävs till att börja med att funktionen måste vara definierad för alla reella tal.

   (a) T.ex. $f(x) = \ln(1 + x^2)$, $x \in \mathbf{R}$.
   Vågräta asymptoter saknas eftersom $f(x) \to \infty$ då $x \to \pm\infty$, och $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} = \frac{1}{x} \cdot \frac{2}{x^{-2}+1} \to 0 \cdot \frac{2}{0+1} = 0$ då $x \to \infty$.

   (b) T.ex. $f(x) = \dfrac{\sin(x^3)}{1 + x^2}$, $x \in \mathbf{R}$.
   Då $x \to \infty$ har vi $|f(x)| \leq \frac{1}{1+x^2} \to 0$ och därmed $f(x) \to 0$ enligt instängningsregeln, så linjen $y = 0$ är en vågrät asymptot. Derivatan är $f'(x) = \frac{3x^2\cos(x^3)}{1+x^2} - \frac{2x\sin(x^3)}{(1+x^2)^2}$. Den andra termen går mot noll då $x \to \infty$, medan den första termen består av faktorn $\frac{3x^2}{1+x^2}$ som går mot 3 och faktorn $\cos(x^3)$ som oscillerar mellan -1 och 1. Det finns alltså t.ex. en talföljd $x_n \nearrow \infty$ sådan att $f'(x_n) \to 3$ och en annan talföljd $y_n \nearrow \infty$ sådan att $f'(y_n) \to -3$, och detta visar att $f'(x)$ saknar gränsvärde då $x \to \infty$. (I synnerhet gäller alltså $f'(x) \not\to 0$.)

   (c) Enligt medelvärdessatsen för derivator är $f(x + 1) - f(x) = f'(\xi) \cdot 1$ för något $\xi \in \,]x, x + 1[$ (som beror på x). Om vi låter $x \to \infty$ i vänsterledet, och därmed $\xi \to \infty$ i högerledet, så fås enligt förutsättning $A - A = L$, dvs. $L = 0$, vilket skulle visas.