

Lösningsskisser för TATA41 2021-01-17 (förmiddag)

1. Funktionen f är definierad för alla $x \neq 1$, och derivatan är

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(e^{-x}) \cdot \frac{x^2-2}{x-1} + e^{-x} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2-2}{x-1}\right) \\ &= -e^{-x} \cdot \frac{x^2-2}{x-1} + e^{-x} \cdot \frac{2x(x-1) - (x^2-2) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-e^{-x}x^2(x-2)}{(x-1)^2}, \end{aligned}$$

vilket ger följande teckentabell:

x		0	1	2				
$-e^{2x}$		-	-	-	-			
x^2		+	+	+	+			
$x-2$		-	-	0	+			
$(x-1)^2$		+	+	+	+			
$f'(x)$		+	+	ej def.	+	0	-	
$f(x)$		↗	terrasspunkt	↗	ej def.	↗	lok. max.	↘

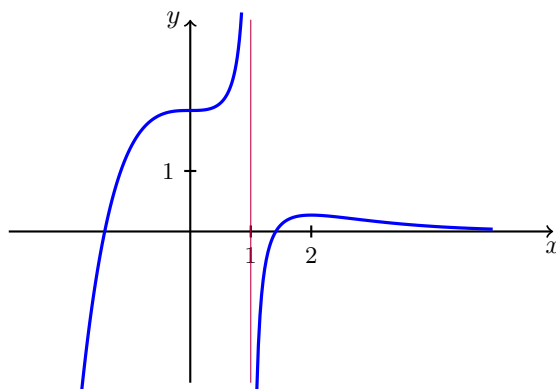
Relevanta gränsvärden:

$$\lim_{x \rightarrow 1^\pm} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^\pm} \left(\underbrace{e^{-x}(x^2-2)}_{\rightarrow \frac{-1}{e} < 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{x-1}}_{\rightarrow \pm\infty} \right) = \mp\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-x} \cdot \frac{1 - \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} = [t = -x] = \lim_{t \rightarrow +\infty} \underbrace{(-te^t)}_{\rightarrow -\infty} \cdot \underbrace{\frac{1 - \frac{2}{t^2}}{1 + \frac{1}{t}}}_{\rightarrow 1} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{x}{e^x}}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\frac{1 - \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}}}_{\rightarrow 1} = 0,$$

det sista enligt ett standardgränsvärde.



Svar: Graf enligt ovan. Linjen $y = 0$ är en vågrät asymptot (då $x \rightarrow \infty$) och linjen $x = 1$ är en lodrät asymptot. Det finns endast en lokal extrempunkt, nämligen den lokala maximipunkten $x = 2$ (med det lokala maximivärdet $f(2) = 2/e^2$). (Terrasspunkter är inte lokala extrempunkter.)

2. (a) Vi kan anta att $x > 0$; då är $\sqrt{x^2} = x$, och därmed $\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x} = \frac{(x^2+x)-(x^2-x)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}} = \frac{2x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}} \rightarrow \frac{2}{1+1} = 1$ då $x \rightarrow \infty$.
- (b) Med $t = x - \pi$ fås $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{x-\pi} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 3(\pi+t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 3t}{3t} \cdot (-3) = 1 \cdot (-3)$, enligt ett standardgränsvärde.
- (c) Bytet $t = -x$ ger $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x + \ln(e^{-x} - x)}{\sqrt{2x^2 + \ln|x|}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2^{-t} + \ln(e^t + t)}{\sqrt{2t^2 + \ln t}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, vilket följande uträkning (där vi kan anta att $t > 0$) visar: $\frac{2^{-t} + \ln(e^t + t)}{\sqrt{2t^2 + \ln t}} = \frac{2^{-t+t} + \ln(1+te^{-t})}{t\sqrt{2+\frac{\ln t}{t^2}}} = \frac{\frac{1}{t2^t} + 1 + \frac{1}{t} \cdot \ln(1+\frac{t}{e^t})}{\sqrt{2+\frac{\ln t}{t^2}}} \rightarrow \frac{0+1+0 \cdot \ln(1+0)}{\sqrt{2+0}}$ då $t \rightarrow \infty$, enligt standardgränsvärden.

Svar: (a) 1 (b) -3 (c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

3. (a) Partiell integration, följt av partialbråksuppdelning, ger $\int \frac{\ln(x-2)}{x^2} dx = \frac{-1}{x} \ln(x-2) - \int \frac{-1}{x} \cdot \frac{1}{x-2} dx = -\frac{\ln(x-2)}{x} + \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x}\right) dx = -\frac{\ln(x-2)}{x} + \frac{1}{2} \ln(x-2) - \frac{1}{2} \ln x + C$. (Vi har $x > 2$ redan från början, så absolutbelopp i logaritmerna behövs ej.)
- (b) Med $t = \cos x$ (och $dt = -\sin x dx$) fås $\int \sqrt{\cos x} \sin 2x dx = \int \sqrt{\cos x} \cdot 2 \sin x \cos x dx = -2 \int \sqrt{t} \cdot t dt = -2 \int t^{3/2} dt = -\frac{4}{5} t^{5/2} + C = -\frac{4}{5} \cos^{5/2} x + C$.
- (c) Kvadratkomplettering i nämnaren ger $\int \frac{x+1}{x^2+4x+5} dx = \int \frac{(x+2)-1}{(x+2)^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln((x+2)^2+1) - \arctan(x+2) + C$.

Svar: (a) $\frac{1}{2} \ln \frac{x-2}{x} - \frac{\ln(x-2)}{x} + C$ (b) $-\frac{4}{5} \cos^{5/2} x + C$
(c) $\frac{1}{2} \ln(x^2+4x+5) - \arctan(x+2) + C$.

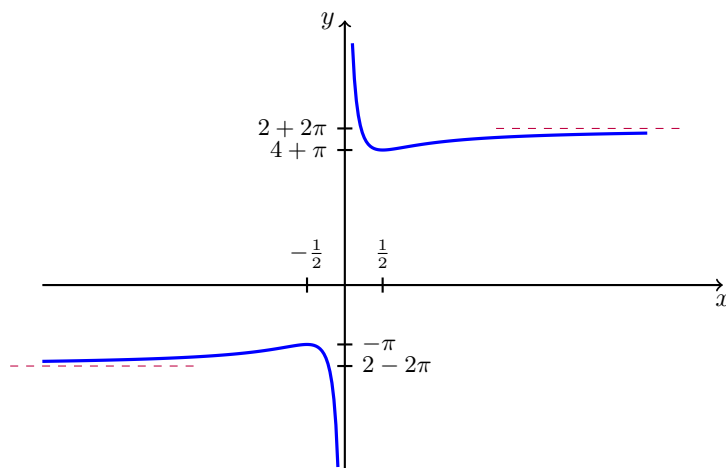
4. Låt $f(x) = 4 \arctan 2x + \frac{1+2x}{x} = 4 \arctan 2x + \frac{1}{x} + 2$, för $x \neq 0$. Då är

$$f'(x) = \frac{8}{1+4x^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{4x^2 - 1}{(1+4x^2)x^2} = \frac{(2x+1)(2x-1)}{(1+4x^2)x^2},$$

vilket ger oss följande:

x	$-1/2$	0	$1/2$
$2x+1$	-	0	+
$2x-1$	-	-	0
$(1+4x^2)x^2$	+	+	0
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	lok. max.	↘

De relevanta gränsvärdena är alla tämligen uppenbara: $f(x) \rightarrow 2 \pm 2\pi$ då $x \rightarrow \pm\infty$ och $f(x) \rightarrow \pm\infty$ då $x \rightarrow 0^\pm$. Och de lokala extremvärdena är $f(\pm\frac{1}{2}) = 2 \pm (2 + \pi)$. Vi kan nu rita grafen $y = f(x)$ och läsa av antalet reella lösningar till ekvationen $f(x) = k$, dvs. antalet skärningar mellan grafen och linjen $y = k$:



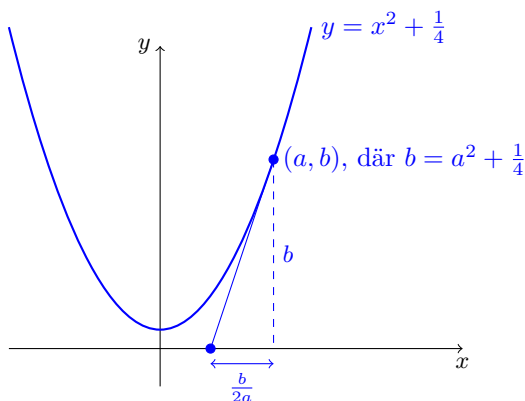
Svar: Ekvationen har en lösning om $k \geq 2 + 2\pi$ eller $k \leq 2 - 2\pi$ eller $k = 4 + \pi$ eller $k = -\pi$. Den har två lösningar om $4 + \pi < k < 2 + 2\pi$ eller $2 - 2\pi < k < -\pi$. Den har inga lösningar om $-\pi < k < 4 + \pi$.

5. Partialbråksuppdelning ger

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{3x^2 + 2x + 1}{4x^4 + x^2} dx &= \int_1^\infty \left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} - \frac{8x + 1}{1 + 4x^2} \right) dx \\ &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} + 2 \ln x - \ln(1 + 4x^2) - \frac{1}{2} \arctan 2x \right]_1^\omega \\ &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\omega} - \ln \left(\frac{1}{\omega^2} + 4 \right) - \frac{1}{2} \arctan 2\omega + 1 + \ln 5 + \frac{1}{2} \arctan 2 \right) \\ &= 0 - \ln 4 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + 1 + \ln 5 + \frac{1}{2} \arctan 2. \end{aligned}$$

Svar: Integralen är konvergent, med värdet $1 + \ln \frac{5}{4} + \frac{1}{2} \arctan 2 - \frac{\pi}{4}$.

6. Beteckna tangeringspunkten med (a, b) , där $b = a^2 + \frac{1}{4}$. Av symmetriskäl räcker det att undersöka $a > 0$. Tangentens lutning ges av derivatan $dy/dx = 2x$ (alltså $2a$ i detta fall), så vi får följande bild:



Avståndet som efterfrågades, mellan de två punkter som markerats i figuren, ges alltså enligt Pythagoras' sats av funktionen

$$f(a) = \sqrt{b^2 + \left(\frac{b}{2a}\right)^2} = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{a} \left(a^2 + \frac{1}{4}\right)^{3/2}, \quad a > 0.$$

Derivatans

$$\begin{aligned} f'(a) &= \frac{-1}{a^2} \left(a^2 + \frac{1}{4}\right)^{3/2} + \frac{1}{a} \cdot \frac{3}{2} \left(a^2 + \frac{1}{4}\right)^{1/2} \cdot 2a \\ &= \frac{1}{a^2} \left(a^2 + \frac{1}{4}\right)^{1/2} \left(-\left(a^2 + \frac{1}{4}\right) + 3a^2\right) \\ &= \frac{1}{a^2} \left(a^2 + \frac{1}{4}\right)^{1/2} \left(2a^2 - \frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

är negativ för $0 < a < \frac{1}{\sqrt{8}}$ och positiv för $\frac{1}{\sqrt{8}} < a$, vilket visar att $f(a)$ antar sitt minsta värde då $a = \frac{1}{\sqrt{8}}$, nämligen

$$f(1/\sqrt{8}) = \sqrt{8} \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4}\right)^{3/2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

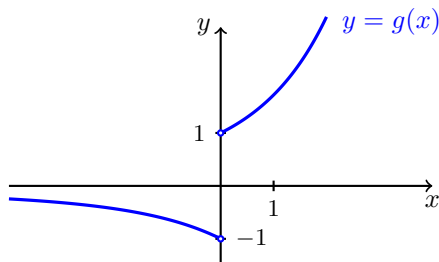
Svar: Det minsta möjliga avståndet är $3\sqrt{3}/8$.

7. Vi börjar med att undersöka $u(x) = (e^x - 1)/x$, $x \neq 0$. Derivatan är

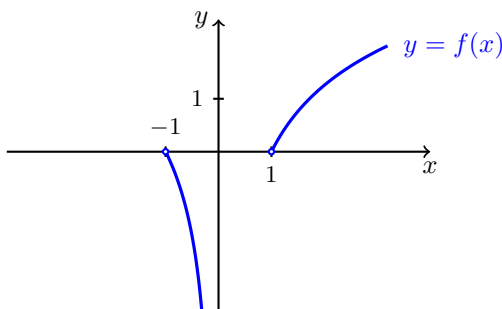
$$u'(x) = \frac{e^x(x-1) + 1}{x^2},$$

och för att kunna se vad den har för tecken undersöker vi täljaren, $v(x) = e^x(x-1) + 1$, $x \in \mathbf{R}$. Dess derivata $v'(x) = xe^x$ har samma tecken som x , så v 's minsta värde är $v(0) = 1 \cdot (0-1) + 1 = 0$. Med andra ord är $v(x) > 0$ för alla $x \neq 0$, och därmed är också $u'(x) > 0$ för alla $x \neq 0$. Alltså är u strängt växande på intervallen $]-\infty, 0[$ och $]0, \infty[$. Vidare har vi enligt standardgränsvärden att $u(x) \rightarrow 1$ då $x \rightarrow 0$, $u(x) \rightarrow 0$ då $x \rightarrow -\infty$ och $u(x) \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow \infty$.

Den funktion vi egentligen ville undersöka var ju $g(x) = (e^x - 1)/|x|$, som är lika med $u(x)$ för $x > 0$ och $-u(x)$ för $x < 0$, så att vi får g 's graf genom att spegla vänstra halvan av u 's graf i x -axeln och behålla den högra halvan som den är:



Från detta är det uppenbart att g är inverterbar, med en invers $f = g^{-1}$ som har definitionsmängd $D_f =]-1, 0[\cup]1, \infty[$ och vars graf ser ut såhär:



Gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0^-} xf(x)$ (som alltså i själva verket är ett vänstergränsvärde, eftersom $f(x)$ är odefinierat för små $x > 0$) undersöks via bytet $x = g(t) \iff t = f(x)$, där $x \rightarrow 0^- \iff t \rightarrow -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} xf(x) = \lim_{t \rightarrow -\infty} g(t)t = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{e^t - 1}{|t|} t = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{e^t - 1}{-t} t = \lim_{t \rightarrow -\infty} (1 - e^t) = 1.$$

Svar: Bevis enligt ovan. Gränsvärdet är 1.