

Tentamen i Envariabelanalys 1

2021-01-17 kl. 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n - 1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$). Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida, där även tid för tentamensvisning meddelas när resultaten är klara.

1. Skissa grafen till funktionen $f(x) = \frac{x^2 - 2}{e^x(x - 1)}$. Ange alla eventuella lodräta och vågräta asymptoter samt lokala extrempunkter.

2. Undersök gränsvärdena

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x})$

(b) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{x - \pi}$

(c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x + \ln(e^{-x} - x)}{\sqrt{2x^2 + \ln|x|}}$.

3. Beräkna följande obestämda integraler:

(a) $\int \frac{\ln(x - 2)}{x^2} dx$ (b) $\int \sqrt{\cos x} \sin 2x dx$ (c) $\int \frac{x + 1}{x^2 + 4x + 5} dx$.

4. Bestäm, för varje $k \in \mathbf{R}$, antalet lösningar till ekvationen $4 \arctan 2x + \frac{1 + 2x}{x} = k$.

5. Beräkna den generaliserade integralen $\int_1^\infty \frac{3x^2 + 2x + 1}{4x^4 + x^2} dx$ (eller visa divergens).

6. Betrakta tangenten till kurvan $y = x^2 + \frac{1}{4}$ i någon punkt på kurvan där $x \neq 0$. Vilket är det minsta möjliga avståndet mellan tangeringspunkten och tangentens skärningspunkt med x -axeln?

7. Låt $g(x) = \frac{e^x - 1}{|x|}$, $x \neq 0$. Visa att det finns en funktion f som har g som invers och undersök gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0} xf(x)$.