Lösningsskisser för TATA41 2021-01-17 (eftermiddag)

1. Funktionen f är definierad för alla $x \neq -1/2$, och derivatan är

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\big(e^{2x}\big) \cdot \frac{2x^2-1}{2x+1} + e^{2x} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{2x^2-1}{2x+1}\right) \\ &= 2e^{2x} \cdot \frac{2x^2-1}{2x+1} + e^{2x} \cdot \frac{4x(2x+1)-(2x^2-1)\cdot 2}{(2x+1)^2} = \frac{8e^{2x}x^2(x+1)}{(2x+1)^2}, \end{aligned}$$

vilket ger följande teckentabell:

x		-1		$-1/2$		0	
$8e^{2x}$	$+$		$+$		$+$		$+$
x^2	$+$		$+$		$+$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$(2x+1)^2$	$+$		$+$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	ej def.	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	ej def.	$\nearrow$	terrass-punkt	$\nearrow$

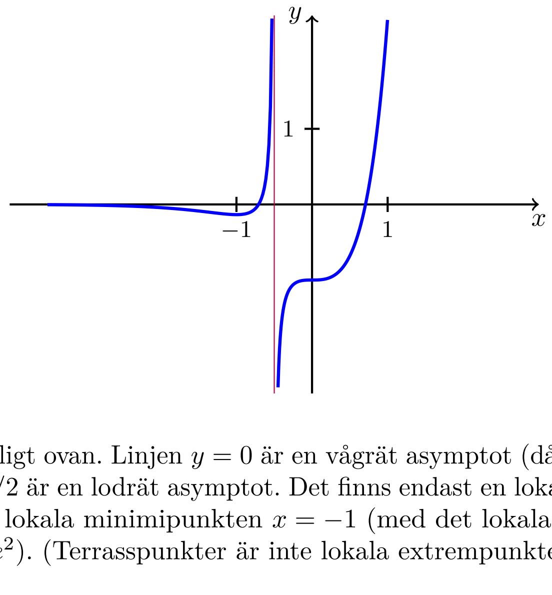
Relevanta gränsvärden:

$$\lim_{x\to(-1/2)^{\pm}} f(x) = \lim_{x\to(-1/2)^{\pm}} \Bigg(\underbrace{e^{2x}(2x^2-1)}_{\to\frac{-1}{2e}<0} \cdot \underbrace{\frac{1}{2x+1}}_{\to\pm\infty}\Bigg) = \mp\infty,$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \underbrace{xe^{2x}}_{\to\infty} \cdot \underbrace{\frac{2-\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x}}}_{\to 1} = \infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} xe^{2x} \cdot \frac{2-\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x}} = \big[t=-x\big] = \lim_{t\to+\infty} \underbrace{\frac{-t}{e^{2t}}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{2-\frac{1}{t^2}}{2-\frac{1}{t}}}_{\to 1} = 0,$$

det sista enligt ett standardgränsvärde.



Svar: Graf enligt ovan. Linjen $y=0$ är en vågrät asymptot (då $x\to-\infty$) och linjen $x=-1/2$ är en lodrät asymptot. Det finns endast en lokal extrempunkt, nämligen den lokala minimipunkten $x=-1$ (med det lokala mimimivärdet $f(-1)=-1/e^2$). (Terrasspunkter är inte lokala extrempunkter.)

2. (a) $\frac{\ln(1+\sin 2x)}{\tan 3x} = \frac{\ln(1+\sin 2x)}{\sin 2x} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \cos 3x \cdot \frac{2}{3} \to 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ då $x \to 0$, enligt standardgränsvärden.

(b) Vi kan anta att $x > 0$; då är $\sqrt{x^2} = x$, och därmed $\frac{\ln(e^{3x}+4)}{\sqrt{x^2+\ln x^4}} = \frac{\ln(e^{3x}(1+4e^{-3x}))}{\sqrt{x^2(1+4\ln(x)/x^2)}} = \frac{3x+\ln(1+4e^{-3x})}{x\sqrt{1+4\ln(x)/x^2}} = \frac{3+\frac{1}{x}\cdot\ln(1+4e^{-3x})}{\sqrt{1+4\ln(x)/x^2}} \to \frac{3+0\cdot 0}{\sqrt{1+0}} = 3$ då $x \to \infty$, enligt standardgränsvärden.

(c) Med $t = \frac{1}{\ln x}$ fås $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{2}{\ln x}}-1}{\ln\left(1+\frac{1}{\ln x}\right)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{e^{2t}-1}{\ln(1+t)} = \lim_{t\to 0^+} 2 \cdot \frac{e^{2t}-1}{2t} \cdot \frac{t}{\ln(1+t)} = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$, enligt standardgränsvärden.

Svar: (a) 2/3 (b) 3 (c) 2.

3. (a) Bytet $t = x^2$ (och $dt = 2x\,dx$), följt av partiell integration, ger $\int x^3 \sin(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int t \sin t\,dt = \frac{1}{2}(-t\cos t + \sin t) + C = \frac{1}{2}\left(\sin(x^2) - x^2\cos(x^2)\right) + C$.

(b) Med $t = \cos x$ (och $dt = -\sin x\,dx$) fås $\int \frac{\sin 2x}{4+\cos^2 x}\,dx = \int \frac{2\sin x\cos x}{4+\cos^2 x}\,dx = \int \frac{-2t}{4+t^2}\,dt = -\ln(4+t^2) + C = -\ln(4+\cos^2 x) + C$.

(c) Partialbråksuppdelning ger $\int \frac{2+x}{x+x^3}\,dx = \int\left(\frac{2}{x} + \frac{-2x+1}{1+x^2}\right)dx = 2\ln|x| - \ln(1+x^2) + \arctan x + C$.

Svar: Se ovan.

4. Variabelbytet $t = e^x$ (och $dt = e^x dx$) ger

$$\int_1^\infty \frac{dx}{e^x - 2e^{-x} + 1} = \int_1^\infty \frac{e^x\,dx}{e^{2x} + e^x - 2} = \int_e^\infty \frac{dt}{t^2 + t - 2}$$
$$= \frac{1}{3}\int_e^\infty \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+2}\right) dt = \frac{1}{3}\lim_{\omega\to\infty}\left[\ln\frac{t-1}{t+2}\right]_e^\omega$$
$$= \frac{1}{3}\lim_{\omega\to\infty}\left(\ln\frac{1-\frac{1}{\omega}}{1+\frac{2}{\omega}} - \ln\frac{e-1}{e+2}\right) = \frac{1}{3}\ln\frac{e+2}{e-1}.$$

Svar: Integralen är konvergent, med värdet $\frac{1}{3}\ln\frac{e+2}{e-1}$.

5. Låt

$$f(x) = \ln(2+3x^2) + \arctan 2x - \ln(1+4x^2) = \arctan 2x + \ln \frac{2+3x^2}{1+4x^2}.$$

Det vi ska visa är då att $f(x) < 1 + \frac{\pi}{2}$ för alla $x \in \mathbf{R}$. Från derivatan

$$f'(x) = \frac{6x}{2+3x^2} + \frac{2}{1+4x^2} - \frac{8x}{1+4x^2} = \frac{6x^2 - 10x + 4}{(2+3x^2)(1+4x^2)} = \frac{6(x-1)(x-\frac{2}{3})}{(2+3x^2)(1+4x^2)}$$

fås teckentabellen

x		$2/3$		1	
$\frac{6}{(2+3x^2)(1+4x^2)}$	$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$x-\frac{2}{3}$	$-$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

där det lokala maximivärdet är

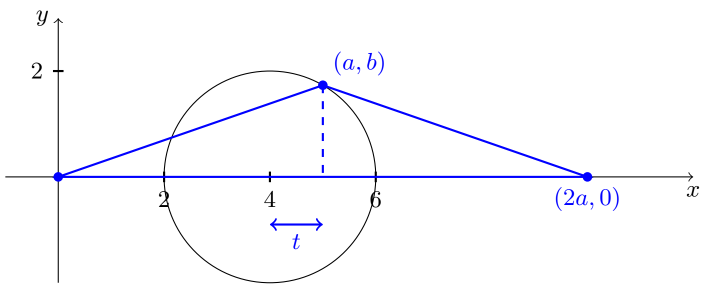
$$f(2/3) = \arctan \frac{4}{3} + \ln \frac{10/3}{25/9} = \arctan \frac{4}{3} + \ln \frac{6}{5}$$

och där gränsvärdet då $x \to \infty$ är

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \left(\arctan 2x + \ln \frac{\frac{2}{x^2} + 3}{\frac{1}{x^2} + 4} \right) = \frac{\pi}{2} + \ln \frac{3}{4}.$$

Båda dessa värden är tämligen uppenbart mindre än $\frac{\pi}{2} + 1$, och därmed är även $f(x)$ det (för alla $x \in \mathbf{R}$), vilket skulle visas.

6. Situationen är följande:



Vi vill bestämma punkten (a, b) så att triangelns area blir maximal. Vi kan anta att $b > 0$ eftersom spegling i x-axeln inte ändrar triangelns area. Och vi kan anta att $a \geq 4$, dvs. att punkten ligger på cirkelns högra halva, för om den ligger på vänstra halvan så är triangelarean uppenbart mindre än för triangeln med samma höjd men med hörnet på högra halvan. Låt alltså $a = 4 + t$ där $0 \leq t < 2$; då är $b = \sqrt{4 - t^2}$ enligt Pythagoras' sats, och triangelarean är

$$A(t) = \frac{2a \cdot b}{2} = (4 + t)\sqrt{4 - t^2}, \quad 0 \leq t < 2.$$

Derivering ger

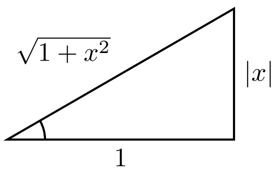
$$A'(t) = 1 \cdot \sqrt{4 - t^2} + (4+t) \cdot \frac{-t}{\sqrt{4 - t^2}} = \frac{4 - 4t - 2t^2}{\sqrt{4 - t^2}} = \frac{-2(t + 1 - \sqrt{3})(t + 1 + \sqrt{3})}{\sqrt{4 - t^2}},$$

vilket är positivt i intervallet $0 \leq t < \sqrt{3} - 1$ och negativt i intervallet $\sqrt{3} - 1 < t < 2$. Detta visar att areans största värde är

$$A(\sqrt{3} - 1) = (4 + (\sqrt{3} - 1))\sqrt{4 - (\sqrt{3} - 1)^2} = (3 + \sqrt{3})\sqrt{2\sqrt{3}}.$$

Svar: $(3 + \sqrt{3})\sqrt{2\sqrt{3}}$.

7. Från nedanstående rätvinkliga triangel ser man att $f(x) = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \arctan |x|$ för alla $x \in \mathbf{R}$:



Och den funktionen är ju inte deriverbar i $x = 0$, eftersom höger- och vänsterderivatorna är olika:

$$f'_{\pm}(0) = \lim_{h \to 0^{\pm}} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^{\pm}} \frac{\arctan |h|}{h} = \lim_{h \to 0^{\pm}} \frac{\arctan |h|}{|h| \operatorname{sgn}(h)} = \pm 1.$$

Svar: Nej, f är inte deriverbar i $x = 0$.