Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Utbildningskod: TATA41
Modul: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 1

2021-01-17 kl. 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$). Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida, där även tid för tentamensvisning meddelas när resultaten är klara.

1. Skissa grafen till funktionen $f(x) = \dfrac{e^{2x}(2x^2-1)}{2x+1}$. Ange alla eventuella lodräta och vågräta asymptoter samt lokala extrempunkter.

2. Undersök gränsvärdena

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin 2x)}{\tan 3x}$

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(e^{3x}+4)}{\sqrt{x^2+\ln x^4}}$

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{2}{\ln x}}-1}{\ln\left(1+\frac{1}{\ln x}\right)}$.

3. Beräkna följande obestämda integraler:

   (a) $\displaystyle\int x^3 \sin(x^2)\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{4+\cos^2 x}\,dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{2+x}{x+x^3}\,dx$.

4. Beräkna den generaliserade integralen $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{e^x - 2e^{-x} + 1}$ (eller visa divergens).

5. Visa att $\ln(2+3x^2) + \arctan 2x < 1 + \dfrac{\pi}{2} + \ln(1+4x^2)$ för alla $x \in \mathbf{R}$.

6. I en likbent triangel ligger de lika långa sidornas gemensamma hörn på cirkeln som har radie 2 och medelpunkt $(4, 0)$. De två andra hörnen ligger på x-axeln, det ena i origo. Vilken är den största area en sådan triangel kan ha?

7. Låt $f(x) = \arccos \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Avgör om f är deriverbar i $x = 0$.