

Tentamen i Envariabelanalys 1

2021-06-12 kl. 14.00–19.00

Penna, radergummi, linjal, passare och gradskiva utan formler på får användas. Inga andra hjälpmedel är tillåtna. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$). Svar anslås på kursens hemsida efter helgen.

1. Skissa grafen till funktionen $f(x) = (1 + x^2) \ln(1 + x^2) - 2x^2$. Ange alla eventuella lokala respektive globala extrempunkter.

2. Beräkna

$$(a) \int \sin x \cos 3x \, dx \quad (b) \int \frac{x+4}{8+8x+4x^2} \, dx \quad (c) \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$$

3. Undersök gränsvärdena

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - 1}{\ln(1 - 2x)} \quad (b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \ln(1 + e^x)}{\sqrt{1 + 2x} + e^{1 + \ln x}} \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \ln 3x \right).$$

4. (a) Låt f vara en funktion. Hur definieras $f'(a)$?

- (b) Bestäm $\frac{d}{dx}(1 + x^3)$ med derivatans definition.

- (c) Bestäm $\frac{d}{dx}e^{\sqrt{x}}$ med derivatans definition.

5. Ange antalet lösningar till ekvationen $e^{x+x^2} = kx$ för alla värden på konstanten $k \in \mathbf{R}$.

6. Undersök $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n} \ln \frac{k}{n}$.

7. Antag att f har kontinuerlig derivata på hela \mathbf{R} och att $\lim_{x \rightarrow \infty} (xf'(x) + f(x)) = 0$. Visa att $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.