Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA41
Modul: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 1

2021-06-12 kl. 8.00–13.00

Penna, radergummi, linjal, passare och gradskiva utan formler på får användas. Inga andra hjälpmedel är tillåtna. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$). Svar anslås på kursens hemsida efter helgen.

1. Skissa grafen till funktionen $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}e^{\arctan x}$. Ange alla eventuella lodräta och vågräta asymptoter samt lokala extrempunkter.

2. Beräkna

$$\text{(a)} \quad \int \cos^5 3x \, dx \qquad \text{(b)} \quad \int \frac{x}{\cos^2 x} \, dx \qquad \text{(c)} \quad \int x^2 \ln(1+x^3) \, dx.$$

3. Undersök gränsvärdena

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to\infty} \left(xe^{2/x} - x\right) \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to 0^+} \ln(1+\sqrt{x}) \cdot \ln x \qquad \text{(c)} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(e^x - x)}{\ln(-x)}.$$

4. Beräkna $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{1+e^{3x}}$ eller visa divergens.

5. Ange antalet lösningar till ekvationen $\arctan \dfrac{1}{x} + \ln(1+x^2) = k$ för alla värden på konstanten $k \in \mathbf{R}$.

6. (a) Formulera medelvärdessatsen för derivator.
   (b) Visa att om $f'(x) = 0$ för alla $x \in]a, b[$, så är $f(x)$ konstant på $]a, b[$.
   (c) Antа att F_1 och F_2 är primitiva funktioner till f på $]a, b[$. Visa att det finns någon konstant C sådan att $F_1(x) = F_2(x) + C$ på $]a, b[$.

7. Undersök $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^2 \int_x^1 \frac{\cos t}{t^3} \, dt$.