Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA41
Modul: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 1

2021-06-13 kl. 8.00–13.00

Penna, radergummi, linjal, passare och gradskiva utan formler på får användas. Inga andra hjälpmedel är tillåtna. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$). Svar anslås på kursens hemsida efter helgen.

1. Skissa grafen till funktionen $f(x) = \dfrac{x}{2x+1}e^{-x}$. Ange alla eventuella lodräta och vågräta asymptoter samt lokala extrempunkter.

2. Beräkna

$$\text{(a)} \quad \int x\left(e^{x^2} - e^x\right) dx \qquad \text{(b)} \quad \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx \qquad \text{(c)} \quad \int \frac{4x^2+9x+4}{x^3+4x^2+4x}\, dx.$$

3. Undersök gränsvärdena

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{(e^{2x}-1)\ln(1+x^2)}{\sin(x^3)} \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to 0^+} x^3 e^{1/\sqrt{x}} \qquad \text{(c)} \quad \lim_{n\to\infty} (2^n + 3^n)^{1/n}.$$

4. Beräkna $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{\ln(1+x^2)}{x^3}\, dx$ eller visa divergens.

5. (a) Vad är definitionen av att en funktion f är kontinuerlig i a? (1p)

   (b) Bestäm konstanterna A och B så att följande funktion blir kontinuerlig på hela $\mathbf{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^{\sqrt{x}} & \text{om } x > 0, \\ A & \text{om } x = 0, \\ \dfrac{e^{\arctan Bx} - 1}{\ln(1-3x)} & \text{om } x < 0. \end{cases} \qquad \text{(2p)}$$

6. Tangentlinjen till kurvan $y = 4 - x^2$ i en tangeringspunkt där $0 < x \le 2$ avgränsar tillsammans med x- och y-axlarna en triangel. Vilka värden kan triangelns area anta?

7. Ange en konstant $C \in \mathbf{R}$ sådan att $C \ge \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 + \sin(k^2)}$ för alla positiva heltal n.