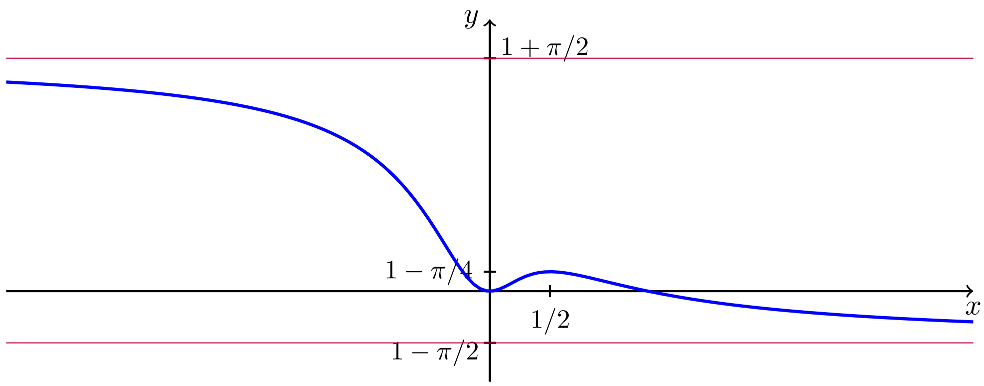
LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen

Lösningsskisser för TATA41 210824

1) f är definierad för $x \in \mathbf{R}$. Standardräkningar (Genomför dessa!) ger $f'(x) = \dfrac{8x(1-2x)}{(4x^2+1)^2}$. Detta ger teckentabellen:

x		0		$1/2$	
$8x$	$-$	0	$+$		$+$
$1-2x$	$+$		$+$	0	$-$
$(4x^2+1)^2$	$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

Vi ser att $f(x) = \dfrac{4+2/x}{4+1/x^2} - \arctan 2x$ d v s $f(x) \to 1 \mp \dfrac{\pi}{2}$, $x \to \pm\infty$, $f(0) = 0$ och att $f(1/2) = 1 - \pi/4$. Detta ger grafen



Svar: Graf enligt ovan. f har en lokal minimipunkt i $x = 0$ (med det lokala minimivärdet $f(0) = 0$) samt en lokal maximipunkt i $x = 1/2$ (med det lokala maximivärdet $f(1/2) = 1 - \pi/4$). Lodräta asymptoter saknas. Linjen $y = 1 + \pi/2$ är en vågrät asymptot då $x \to -\infty$ och linjen $y = 1 - \pi/2$ är en vågrät asymptot då $x \to \infty$. Grafen ger att f har 2 nollställen.

2a) Standardgränsvärden ger $\dfrac{\sin \pi x}{x^2+x} = \dfrac{\sin \pi x}{\pi x} \cdot \dfrac{\pi}{x+1} \to 1 \cdot \dfrac{\pi}{0+1} = \pi$, $x \to 0$.

2b) Bytet $t = x+1$, kända räknelagar och standardgränsvärden ger

$$\lim_{x\to -1} \frac{\sin \pi x}{x^2+x} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(\pi t - \pi)}{(t-1)t} = \lim_{t \to 0}\left(-\frac{\sin \pi t}{\pi t} \cdot \frac{\pi}{t-1}\right) = -1 \cdot \frac{\pi}{0-1} = \pi.$$

2c) $\dfrac{\sin \pi x}{x^2+x} = \dfrac{1}{x^2+x} \cdot \sin \pi x$. Då $\dfrac{1}{x^2+x} \to 0$, $x \to \infty$ och $\sin \pi x$ är begränsad är $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sin \pi x}{x^2+x} = 0$ enligt sats.

Svar: (a) π (b) π (c) 0.

3a) Bytet $t = x^3$, $dt = 3x^2\,dx$ följt av en partialintegration ger (C är en godtycklig konstant)

$$\int x^5 e^{x^3}\,dx = \int \frac{te^t}{3}\,dt = \frac{1}{3}\left(te^t - \int e^t\,dt\right) = \frac{e^t}{3}(t-1) + C = \frac{e^{x^3}}{3}(x^3-1) + C.$$

3b) Bytet $t = \sin x$, $dt = \cos x\,dx$ och en partialbråksuppdelning ger (C är en godtycklig konstant)

$$\int \frac{\cos x\,dx}{3+\cos^2 x} = \int \frac{\cos x\,dx}{4-\sin^2 x} = \int \left(\frac{1/4}{2-t} + \frac{1/4}{2+t}\right)dt = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{2+\sin x}{2-\sin x}\right) + C.$$

3c) Variabelbytet $t = \tan x$, $dt = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$ ger (C är en godtycklig konstant)

$$\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\cos^2 x}\,dx = \int \sqrt{t}\,dt = \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{3}(\tan x)^{3/2} + C.$$

Alternativ: Låt $F(x)$ vara en av de sökta primitiverna. Partialintegrera faktorn $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ så fås en ekvation för $F(x)$ som sedan går att lösa.

Svar: (a) $\dfrac{e^{x^3}}{3}(x^3-1) + C$ (b) $\dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{2+\sin x}{2-\sin x}\right) + C$ (c) $\dfrac{2}{3}(\tan x)^{3/2} + C$.

4) Låt x vara rätblockets bredd. Sökta volymen ges då av $V(x) = x \cdot 2x \cdot (12-2x) = 4x^2(6-x)$, $0 < x < 6$. Derivering ger $V'(x) = 12x(4-x)$, d v s $V'(x) > 0$ om $0 < x < 4$, $V'(x) = 0$ om $x = 4$ och $V'(x) < 0$ om $4 < x < 6$. $V(x)$ är alltså strängt växande på $]0,4]$ och strängt avtagande på $[4,6[$. Detta visar att maximala volymen blir $V(4) = 128$ volymsenheter.

Svar: 128 volymsenheter.

5) Partialintegration, partialbråksuppdelning, standardgränsvärden samt kända räknelagar ger

$$\begin{aligned}
I(\omega) := \int_1^\omega \frac{\ln(x^2+2x+2)}{x^2}\,dx &= \left[-\frac{\ln(x^2+2x+2)}{x}\right]_1^\omega + \int_1^\omega \frac{2x+2}{x((x+1)^2+1)}\,dx \\
&= \ln 5 - \frac{\ln(\omega^2+2\omega+2)}{\omega} + \int_1^\omega \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2}{x^2+2x+2} + \frac{1}{(x+1)^2+1}\right)dx \\
&= \ln 5 - \frac{\ln(\omega^2+2\omega+2)}{\omega} + \left[\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) + \arctan(x+1)\right]_1^\omega \\
&= -\frac{2\ln\omega}{\omega} - \frac{\ln(1+2/\omega+2/\omega^2)}{\omega} - \frac{1}{2}\ln(1+2/\omega+2/\omega^2) + \arctan(\omega+1) + \frac{3\ln 5}{2} - \arctan 2,
\end{aligned}$$

och alltså är $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln(x^2+2x+2)}{x^2}\,dx = \lim_{\omega\to\infty} I(\omega) = \frac{\pi}{2} + \frac{3\ln 5}{2} - \arctan 2.$

Svar: Integralen är konvergent med värdet $\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{3\ln 5}{2} - \arctan 2$.

6) Sätt $f(x) = \displaystyle\int_{e^2}^x \frac{dt}{\ln t} - \frac{2x}{\ln x} + e^2$ med $D_f =]1,\infty[$. Analysens huvudsats ger att f är deriverbar och $f'(x) = \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{2\ln x - 2x\cdot 1/x}{(\ln x)^2} = \dfrac{2-\ln x}{(\ln x)^2}$ och vi ser att $f'(x) > 0$ om $1 < x < e^2$, $f'(x) = 0$ om $x = e^2$ och $f'(x) < 0$ om $x > e^2$.

f är alltså strängt växande på $]1, e^2]$ och strängt avtagande på $[e^2, \infty[$ och då $f(e^2) = 0$ visar detta att $f(x) < f(e^2) = 0$ för $1 < x \neq e^2$ d v s $\displaystyle\int_{e^2}^{x} \frac{dt}{\ln t} < \frac{2x}{\ln x} - e^2$ om $1 < x \neq e^2$.

Svar: Om $x > 1$ gäller olikheten precis då $x \neq e^2$.

7a) Då $g'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(h) - g(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h^2 f(h) - 0^2 \cdot f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} h f(h) = 0$ (ty f är begränsad) följer att $g'(0)$ existerar. Påståendet är alltså sant.

7b) Sätt $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ för $x \neq 0$ och $f(0) = 0$ så uppfyller f de givna förutsättningarna. Då är $g'(x) = 3x^2 \sin \dfrac{1}{x} - x \cos \dfrac{1}{x}$ för $x \neq 0$ och $g'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(h) - g(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h^3 f(h) - 0^3 \cdot f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} h^2 f(h) = 0$, ty f är begränsad. Betrakta nu differenskvoten

$$\frac{g'(h) - g'(0)}{h} = \frac{3h^2 \sin \frac{1}{h} - h \cos \frac{1}{h} - 0}{h} = 3h \sin \frac{1}{h} - \cos \frac{1}{h}.$$

Här går första termen mot 0 (nollgående funktion·begränsad funktion) då $h \to 0$ medan andra faktorn saknar gränsvärde då $h \to 0$. Det följer att differenskvoten saknar gränsvärde då $h \to 0$ så $g''(0)$ existerar inte. Vårt f är alltså ett motexempel till det givna påståendet, som därför är falskt.

Svar: Påståendet i 7a) är sant, påståendet i 7b) är falskt. Se ovan för motivering.