Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA41
Modul: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 1

2021-08-24 kl. 8.00–13.00

Penna, radergummi, linjal, passare och gradskiva utan formler på får användas. Inga andra hjälpmedel är tillåtna. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$). Svar anslås på kursens hemsida.

1. Skissa grafen till funktionen $f(x) = \dfrac{4x^2+2x}{4x^2+1} - \arctan 2x$. Ange antalet nollställen till f samt alla eventuella lodräta och vågräta asymptoter och lokala extrempunkter.

2. Undersök gränsvärdena

$$\text{(a)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi x)}{x^2+x} \qquad \text{(b)}\quad \lim_{x\to -1}\frac{\sin(\pi x)}{x^2+x} \qquad \text{(c)}\quad \lim_{x\to \infty}\frac{\sin(\pi x)}{x^2+x}$$

3. Beräkna

$$\text{(a)}\quad \int x^5 e^{x^3}\,dx \qquad \text{(b)}\quad \int \frac{\cos x}{3+\cos^2 x}\,dx \qquad \text{(c)}\quad \int \frac{\sqrt{\tan x}}{\cos^2 x}\,dx.$$

4. Ett rätblock (tegelsten) uppfyller att längden är dubbelt så stor som bredden, och att längden plus höjden är 12 längdenheter. Vilken är den största möjliga volymen?

5. Beräkna $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln(x^2+2x+2)}{x^2}\,dx$ (eller visa divergens).

6. För vilka $x > 1$ gäller olikheten $\displaystyle\int_{e^2}^x \frac{dt}{\ln t} < \frac{2x}{\ln x} - e^2$?

7. Antag att f är begränsad på hela $\mathbf{R}$ och deriverbar överallt utom möjligen i $x = 0$. Bevisa eller ge motexempel till följande påståenden:

   (a) Om $g(x) = x^2 f(x)$, så existerar $g'(0)$.

   (b) Om $g(x) = x^3 f(x)$, så existerar $g''(0)$.