Lösningsskisser för TATA41 220112

1a) Då $\ln x \to -\infty\,,\ x \to 0^+$ följer att $\dfrac{\ln 2x}{\ln x^2} = \dfrac{\ln 2 + \ln x}{2\ln x} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\ln 2}{2\ln x} \to \dfrac{1}{2} + 0 = \dfrac{1}{2}\,,\ x \to 0^+$.

1b) Standardgränsvärden ger $\dfrac{\sin 7x}{\sqrt{x}(e^{\sqrt{x}}-1)} = \dfrac{\sin 7x}{7x} \cdot \dfrac{7}{\frac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}}} \to 1 \cdot \dfrac{7}{1} = 7\,,\ x \to 0.$

1c) Bytet $t = \dfrac{3}{x}$ samt standardgränsvärden ger

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\ln(3+x) - \ln x\right) = \lim_{x\to\infty} x \ln\left(1 + \frac{3}{x}\right) = \lim_{t\to 0^+} \frac{3\ln(1+t)}{t} = 3 \cdot 1 = 3.$$

Svar: (a) $\dfrac{1}{2}$ (b) 7 (c) 3.

2a) Partialbråksuppdelning ger (C är en godtycklig konstant)

$$\int \frac{dx}{x^2 - 8x + 15}\,dx = \int \frac{dx}{(x-5)(x-3)} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-3}\right) dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-5}{x-3}\right| + C.$$

2b) Bytet $t = \sin x$, $dt = \cos x\,dx$ och en partialintegration ger (C är en godtycklig konstant)

$$\int \sin(2x)\sin(\sin x)\,dx = 2\int \sin x \cdot \sin(\sin x) \cdot \cos x\,dx = 2\int t\sin t\,dt = -2t\cos t + 2\int \cos t\,dt$$
$$= -2t\cos t + 2\sin t + C = 2\sin(\sin x) - 2\sin x \cdot \cos(\sin x) + C.$$

2c) Bytet $t = \sqrt{x+2} \Leftrightarrow x = t^2 - 2\,,\ t \geq 0,\ dx = 2t\,dt$ ger (C är en godtycklig konstant)

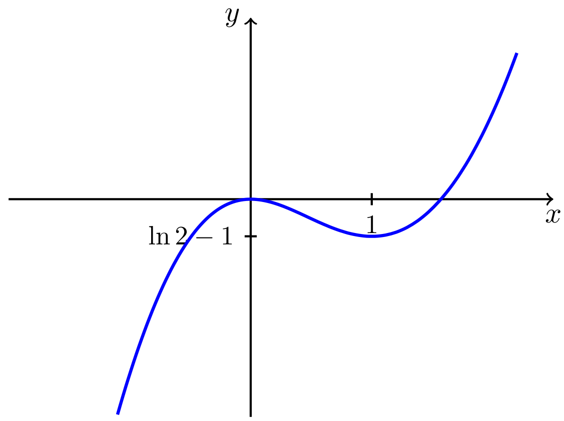
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}+2} = \int \frac{2t}{t+2}\,dt = \int \left(2 - \frac{4}{t+2}\right) dt = 2t - 4\ln|t+2| + C$$
$$= 2\sqrt{x+2} - 4\ln\left(\sqrt{x+2}+2\right) + C.$$

Svar: (a) $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-5}{x-3}\right| + C$ (b) $2\sin(\sin x) - 2\sin x\cos(\sin x) + C$ (c) $2\sqrt{x+2} - 4\ln(\sqrt{x+2}+2) + C$.

3) f är definierad och kontinuerlig för alla $x \in \mathbf{R}$, vilket ger att lodräta asymptoter saknas. Standardräkningar (Genomför dessa!) ger $f'(x) = 2(x-1)\arctan x$. Detta ger teckentabellen:

x		0		1	
$2(x-1)$	$-$		$-$	0	$+$
$\arctan x$	$-$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Vi ser att $f(x) = x^2 \left(\dfrac{\ln x^2}{x^2} + \dfrac{\ln(1+1/x^2)}{x^2} - \dfrac{1}{x} + \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^2 \arctan x \right)$ och enligt standardgränsvärden går parentesen mot $\pm\dfrac{\pi}{2}\,,\ x \to \pm\infty$ d v s $f(x) \to \pm\infty\,,\ x \to \pm\infty$ så vågräta asymptoter saknas. Vidare är $f(0) = 0$ och $f(1) = \ln 2 - 1$. Detta ger grafen



Svar: Graf enligt ovan. f har en lokal maximipunkt i $x = 0$ (med det lokala maximivärdet $f(0) = 0$) samt en lokal minimipunkt i $x = 1$ (med det lokala minimivärdet $f(1) = \ln 2 - 1$). Både lodräta och vågräta asymptoter saknas.

4) Gör först bytet $t = e^x$, $dx = dt/t$. En partialintegration ger sedan

$$I(b) := \int_0^b \frac{\ln(2+e^{2x})}{e^x}\,dx = \int_1^{e^b} \frac{\ln(2+t^2)}{t^2}\,dt = \big/ a = e^b \big/ = \left[-\frac{\ln(2+t^2)}{t}\right]_1^a + \int_1^a \frac{2t}{t(2+t^2)}\,dt$$

$$= \ln 3 - \frac{\ln(2+a^2)}{a} + \int_1^a \frac{dt}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2} = \ln 3 - \frac{\ln(2+a^2)}{a} + \left[\sqrt{2}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right]_1^a$$

$$= \ln 3 - \frac{2\ln a}{a} - \frac{\ln(1+2/a^2)}{a} + \sqrt{2}\arctan\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{2}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}},$$

och alltså är $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln(2+e^{2x})}{e^x}\,dx = \lim_{b\to\infty} I(b) = \ln 3 + \frac{\pi}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}$ ty $a \to \infty\,,\ b \to \infty$.

Svar: Integralen är konvergent med värdet $\ln 3 + \dfrac{\pi}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\arctan\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

5a) Se kursboken.

5b) Då $f(x) = \displaystyle\int_{x^3}^1 \frac{\cos t}{t}\,dt + \int_1^x \frac{\cos t}{t}\,dt = -\int_1^{x^3} \frac{\cos t}{t}\,dt + \int_1^x \frac{\cos t}{t}\,dt$ ger analysens huvudsats samt kedjeregeln att $f'(x) = -\dfrac{\cos x^3}{x^3}\cdot 3x^2 + \dfrac{\cos x}{x} = \dfrac{\cos x - 3\cos x^3}{x}$.

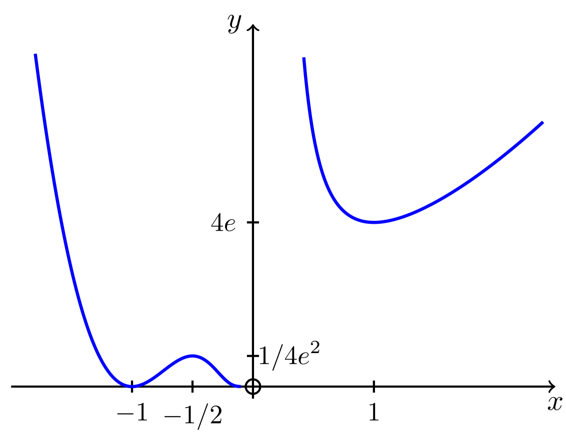
5c) Låt $g(x)$, $h(x)$ vara V.L. resp. H.L. i den givna likheten. Då är $g(x) = -\displaystyle\int_0^{-x} f(t)\,dt + \int_0^x f(t)\,dt$ så huvudsatsen och kedjeregeln ger $g'(x) = -f(-x)\cdot(-1) + f(x) = f(-x) + f(x)$. Huvudsatsen ger också $h'(x) = 2f(x)$. Då $g(x) = h(x) \Rightarrow g'(x) = h'(x)$ följer att $f(-x) + f(x) = 2f(x) \Leftrightarrow f(-x) = f(x)$ vilket skulle visas.

Svar: (a) Se kursboken. (b) $\dfrac{\cos x - 3\cos x^3}{x}$ (c) Se ovan.

6) Sätt $f(x) = (1+x)^2 e^{1/x}$. Då är f definierad för $x \neq 0$. Standardräkningar (Gör dessa!) ger $f'(x) = \dfrac{(x+1)(2x+1)(x-1)}{x^2} e^{1/x}$. Teckentabell:

x		-1		$-1/2$		0		1	
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$2x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
x^2	$+$		$+$		$+$	0	$+$		$+$
$e^{1/x}$	$+$		$+$		$+$	ej def.	$+$		$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	ej def.	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	ej def.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Vi ser att $f(x) \to \infty$, $x \to \pm\infty$, $f(x) \to \infty$, $x \to 0^+$ och $f(x) \to 0$, $x \to 0^-$. Vidare är $f(-1) = 0$ och $f(-1/2) = \dfrac{1}{4e^2}$ och $f(1) = 4e$. Detta ger grafen (obs: $f(0)$ är ej definierad)



Svar: Avläsning i grafen ger att lösning saknas om $k < 0$, en lösning om $k = 0$ eller $\dfrac{1}{4e^2} < k < 4e$, 2 lösningar om $k = \dfrac{1}{4e^2}$ eller $k = 4e$ och 3 lösningar om $0 < k < \dfrac{1}{4e^2}$ eller $k > 4e$.

7) Medelvärdessatsen för integraler ger att det finns en punkt $a \in [0,1]$ sådan att $0 = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = f(a)(1-0) = f(a)$. f har alltså minst ett nollställe, a, i $[0,1]$. Antag att detta är f:s enda nollställe i $[0,1]$. Då $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 0$ måste f växla tecken i a. Antag att $f(x) < 0$ för $x < a$ och $f(x) > 0$ för $x > a$ (fallet $f(x) > 0$ för $x < a$ och $f(x) < 0$ för $x > a$ behandlas analogt). Betrakta $g(x) = (x-a)f(x)$. Å ena sidan är $g(x) > 0$ för alla $x \in [0,1]$ med $x \neq a$ vilket ger att $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx > 0$. Å andra sidan är $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 xf(x)\,dx - a\int_0^1 f(x)\,dx = 0 - a\cdot 0 = 0$ enligt förutsättning. P g a denna motsägelse måste vårt antagande att f bara har ett nollställe i $[0,1]$ vara falskt. f har alltså minst två nollställen i $[0,1]$, vilket skulle visas.

Svar: Se ovan.