Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA41
Modul: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 1

2022-01-12 kl. 8.00–13.00

Penna, radergummi, linjal, passare och gradskiva utan formler på får användas. Inga andra hjälpmedel är tillåtna. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$). Svar anslås på kursens hemsida.

1. Undersök gränsvärdena

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(2x)}{\ln(x^2)}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(7x)}{\sqrt{x}(e^{\sqrt{x}}-1)}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x(\ln(3+x)-\ln x)$.

2. Beräkna

   (a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-8x+15}$ (b) $\displaystyle\int \sin(2x)\sin(\sin x)\,dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\sqrt{x+2}}$.

3. Skissa grafen till funktionen $f(x) = \ln(1+x^2) - x + (x-1)^2 \arctan x$. Ange alla eventuella lodräta och vågräta asymptoter samt lokala extrempunkter.

4. Beräkna $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln(2+e^{2x})}{e^x}\,dx$ (eller visa divergens).

5. (a) Formulera analysens huvudsats.

   (b) Låt $f(x) = \displaystyle\int_{x^3}^{x} \frac{\cos t}{t}\,dt$, $x > 0$. Beräkna $f'(x)$.

   (c) Antag att f är kontinuerlig på $\mathbf{R}$. Visa att om $\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = 2\int_0^x f(t)\,dt$ för alla $x \in \mathbf{R}$, så gäller $f(x) = f(-x)$ för alla $x \in \mathbf{R}$.

6. Ange, för varje konstant $k \in \mathbf{R}$, antalet reella lösningar till $(1+x)^2 e^{1/x} = k$.

7. Antag att f är kontinuerlig på $[0, 1]$ och att $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x f(x)\,dx = 0$. Visa att f har minst två olika nollställen på $[0, 1]$.