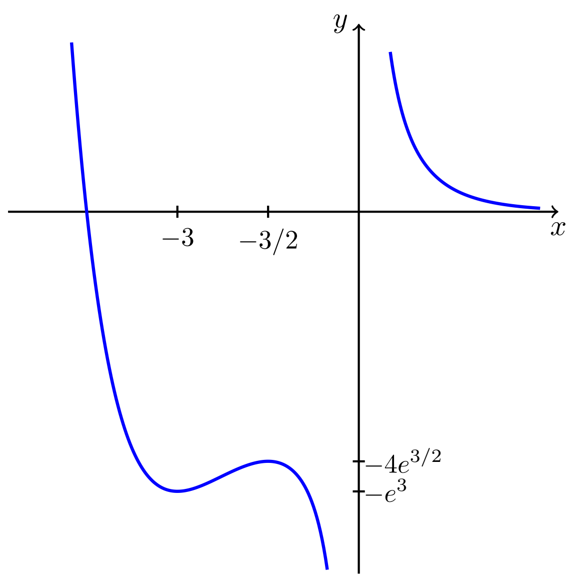
LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen

Lösningsskisser för TATA41 220324

1) f är definierad för $x \neq 0$. Standardräkningar (Gör dessa!) ger $f'(x) = -\dfrac{e^{-x}}{x^2}(x+3)(2x+3)$.
Teckentabell:

x		-3		$-3/2$		0	
$-e^{-x}$	$-$		$-$		$-$		$-$
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$2x+3$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
x^2	$+$		$+$		$+$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	ej def.	$-$
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	ej def.	$\searrow$

Vi ser att $f(x) \to \pm\infty\,,\ x \to 0^{\pm}$, $f(x) \to 0\,,\ x \to \infty$ och $f(x) \to \infty\,,\ x \to -\infty$. Vidare är $f(-3) = -e^3$ och $f(-3/2) = -4e^{3/2}$. Detta ger grafen



Svar: Graf enligt ovan. Linjen $x = 0$ är lodrät asymptot och linjen $y = 0$ är vågrät asymptot då $x \to \infty$. f har en lokal minimipunkt i $x = -3$ (med det lokala minimivärdet $f(-3) = -e^3$) och en lokal maximipunkt i $x = -3/2$ (med det lokala maximivärdet $f(-3/2) = -4e^{3/2}$).

2a) Partiell integration ger (C är en godtycklig konstant)

$$\int x^2 \cos 3x\,dx = \frac{x^2}{3}\sin 3x - \int \frac{2x}{3}\sin 3x\,dx = \frac{x^2}{3}\sin 3x + \frac{2x}{9}\cos 3x - \int \frac{2}{9}\cos 3x\,dx$$
$$= \frac{9x^2-2}{27}\sin 3x + \frac{2x}{9}\cos 3x + C.$$

2b) Variabelbytet $x = t^3$, $dx = 3t^2\,dt$ samt polynomdivision ger (C är en godtycklig konstant)

$$\int \frac{dx}{x^{1/3}-1} = \int \frac{3t^2}{t-1}\,dt = \int \left(3t+3+\frac{3}{t-1}\right)dt = \frac{3t^2}{2}+3t+3\ln|t-1|+C$$
$$= \frac{3x^{2/3}}{2}+3x^{1/3}+3\ln|x^{1/3}-1|+C.$$

2c) $\displaystyle\int \cos x\cos 2x\,dx = \int \cos x(1-2\sin^2 x)\,dx = \sin x - 2\int \cos x \sin^2 x\,dx = \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + C,$
där C är en godtycklig konstant.

Svar: (a) $\dfrac{9x^2-2}{27}\sin 3x + \dfrac{2x}{9}\cos 3x + C$ (b) $\dfrac{3x^{2/3}}{2}+3x^{1/3}+3\ln|x^{1/3}-1|+C$
(c) $\sin x - \dfrac{2}{3}\sin^3 x + C$.

3a) Enligt ett standardgränsvärde är $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1} = 1\cdot\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$

3b) $\displaystyle\frac{\ln\left(1+e^{3x}\right)}{\sqrt{1+x^3}} = \frac{3x+\ln\left(1+e^{-3x}\right)}{x^{3/2}\sqrt{1+x^{-3}}} = \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{3+\frac{\ln\left(1+e^{-3x}\right)}{x}}{\sqrt{1+x^{-3}}} \to 0\cdot\frac{3+0}{\sqrt{1+0}} = 0\,,\ x\to\infty.$

3c) Enligt ett standardgränsvärde är $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln 2}-1}{x\ln 2}\cdot\ln 2 = 1\cdot\ln 2 = \ln 2.$

Svar: (a) $\dfrac{1}{2}$ (b) 0 (c) $\ln 2$.

4) Låt det supertrendiga glaset ha radie r och höjd h så att $\pi r^2 h = 8\pi \Leftrightarrow h = \dfrac{8}{r^2}$. Totala arean är då $A = 2\pi r h + \pi r^2 = \dfrac{16\pi}{r} + \pi r^2 =: f(r)$ för $r > 0$. Då är $f'(r) = -\dfrac{16\pi}{r^2} + 2\pi r = \dfrac{2\pi}{r^2}\left(r^3-8\right)$ så $f'(r) < 0$ för $0 < r < 2$, $f'(r) = 0$ för $r = 2$ och $f'(r) > 0$ för $r > 2$ (*Alternativ:* Faktorisera $r^3 - 8$ och gör teckentabell!). f är alltså strängt avtagande på $]0,2]$ och strängt växande på $[2,\infty[$ så f:s minsta värde är $f(2) = 12\pi$ och höjden på glaset med denna area är $\dfrac{8}{2^2} = 2$.

Svar: Det supertrendiga glaset med minst area har radie = höjd = 2 och arean 12π.

5) Partiell integration och partialbråksuppdelning (genomför detaljerna!) ger

$$I := \int_0^a \frac{\ln(x^2+2)}{(x+1)^2}\,dx = \left[-\frac{\ln(x^2+2)}{x+1}\right]_0^a + \int_0^a \frac{2x}{(x+1)(x^2+2)}\,dx$$
$$= \ln 2 - \frac{\ln(a^2+2)}{a+1} + \frac{2}{3}\int_0^a \left(\frac{x+2}{x^2+2} - \frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$= \ln 2 - \frac{\ln(a^2+2)}{a+1} + \frac{1}{3}\left[\ln(x^2+2) - 2\ln|x+1|\right]_0^a + \frac{2}{3}\int_0^a \frac{dx}{1+(x/\sqrt{2})^2}$$
$$= \ln 2 - \frac{\ln(a^2+2)}{a+1} + \frac{1}{3}\left[\ln\frac{x^2+2}{(x+1)^2} + 2\sqrt{2}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}\right]_0^a$$
$$= \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{2\ln a + \ln(1+2a^{-2})}{a+1} + \frac{1}{3}\ln\frac{1+2a^{-2}}{(1+a^{-1})^2} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\arctan\frac{a}{\sqrt{2}} \to \frac{2\ln 2 + \pi\sqrt{2}}{3}\,,\ a\to\infty,$$

vilket visar att $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln(x^2+2)}{(x+1)^2}dx$ är konvergent och $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln(x^2+2)}{(x+1)^2}dx = \frac{2\ln 2 + \pi\sqrt{2}}{3}$.

Svar: Integralen är konvergent med värdet $\dfrac{2\ln 2 + \pi\sqrt{2}}{3}$.

6a) Se kursboken.

6b) f är kontinuerlig i 0 om och endast om $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Första likheten ger $A = \lim\limits_{x\to 0^-} \arctan\dfrac{1}{x} = -\dfrac{\pi}{2}$, och då

$$\frac{x^{1+\sqrt{x}} - \sqrt{1+Bx} + 1}{x} = x^{\sqrt{x}} + \frac{1-\sqrt{1+Bx}}{x} = e^{x^{1/2}\ln x} - \frac{B}{1+\sqrt{1+Bx}} \to 1 - \frac{B}{2}\,,\ x \to 0^+,$$

enligt ett standardgränsvärde, följer att $1 - \dfrac{B}{2} = -\dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow B = \pi + 2$.

Svar: (a) Se kursboken (b) $A = -\dfrac{\pi}{2}$, $B = \pi + 2$.

7) Enligt satsen om största och minsta värde antar $p(x)$ ett minsta värde på $[0,2]$ för varje fixt a (ty p är kontinuerlig på $[0,2]$) och p antar förstås minst ett negativt funktionsvärde på $[0,2]$ om och endast om detta minsta värde är < 0.

p:s minsta värde antas i 0, 2 eller (ty p är deriverbar på $]0,2[$) i något $x \in]0,2[$ med $p'(x) = 0$. Då $p(0) = 0$, $p(2) = \dfrac{2}{3}$ följer att p:s minsta värde på $[0,2]$ är < 0 precis då $p(x) < 0$ för något $x \in]0,2[$ med $p'(x) = 0$.
Vi ser att $p'(x) = x^2 - 2ax + 2a - 1 = (x-1)(x-2a+1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ eller $x = 2a-1$ och då $p(1) = a - \dfrac{2}{3}$ följer att alla $a < \dfrac{2}{3}$ löser problemet.
Vi observerar att $2a - 1 \in]0,2[\Leftrightarrow \dfrac{1}{2} < a < \dfrac{3}{2}$ och då

$$p(2a-1) = \frac{(2a-1)^3}{3} - a(2a-1)^2 + (2a-1)^2 = \frac{(2a-1)^2(2-a)}{3} > 0,$$

för alla a med $\dfrac{1}{2} < a < \dfrac{3}{2}$ ger detta fall inga ytterligare lösningar.

Svar: $a < \dfrac{2}{3}$.