

Några vanliga misstag på tentan TATA41, 250326. Det här är inte isolerade/självständiga alternativa lösningsförslag till analystentan som gick 26 mars 2025, utan kommentererna måste läsas *tillsammans* med tentan/boken/föreläsningssanteckningarna/lösningsskissen (eller din egen tenta om du skrev den). Tyvärr försvann många poäng på ett tråkigt sätt, och här kommer en liten sammanfattning av fel som man kan vara uppmärksam på.

Uppgift 1. Här försvann många poäng genom otillåten stegvis gränsövergång. (Ibland blir svaret rätt, ibland inte.)

Exempel: Låt oss undersöka uttrycket $(1 + 1/t)^t$ då $t \rightarrow \infty$. Om vi sätter $x = 1/t$ finner vi att $x \rightarrow 0^+$ när $t \rightarrow \infty$. Det innebär att $\lim_{t \rightarrow \infty} (1 + 1/t)^t = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x)^{1/x} = e$ enligt sats 3.11e). (Vi använder bara satsen i specialfallet $x \rightarrow 0^+$.)

Om man vill resonera kring $(1 + 1/t)^t$ för stora t måste man "hålla ihop" t :na. Om man (felaktigt) låter "bara t i parentesen" $\rightarrow \infty$ landar man i $(1 + 0)^t = 1^t = 1 \rightarrow 1, t \rightarrow \infty$. Det stämmer inte. Om man (felaktigt) låter "bara t i exponenten" $\rightarrow \infty$ är saken mera oklar, men "något större än 1" upphöjt till mer och mer går ju mot ∞ , så får vi alltså helt enkelt ∞ ? Nej. De två t :na måste gå mot oändligheten *samtidigt*.

Man kanske inte ser varför man skall prova med $x = 1/t$. Hur kommer man igång då? Här har vi hjälp av omskrivningen $a^b = e^{\ln a^b} = e^{b \ln a}$. Vi får $(1 + 1/t)^t = e^{t \ln(1+1/t)}$. Vi noterar nu att för stora t är $\ln(1+1/t)$ av typen "ln för 1 plus något litet". Vi kommer att tänka på standardgränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 0$ som ju innehåller just "ln för 1 plus något litet", och i så fall vill vi prova med att låta $1/t$ bli x . Alltså, $(1 + 1/t)^t = e^{t \ln(1+1/t)} = e^{\frac{\ln(1+1/t)}{1/t}} = //$ låt $x = 1/t //$ $= e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} \rightarrow e^1 = e$ då $x \rightarrow 0^+$ (eller $x \rightarrow 0$) eftersom $\frac{\ln(1+x)}{x} \rightarrow 1$ då $x \rightarrow 0$ enligt standardgränsvärde (samt att exponentialfunktionen är kontinuerlig).

Av ovanstående anledning kan man INTE påstå att till exempel $\sin \sqrt{2x} = \frac{\sin \sqrt{2x}}{\sqrt{2x}} \sqrt{2x} \rightarrow \sqrt{2x}$ då $x \rightarrow 0^+$, även om $\frac{\sin \sqrt{2x}}{\sqrt{2x}} \rightarrow 1$ då $x \rightarrow 0^+$. Om man gör så har vissa x 'försvunnit' (dvs de gick mot 0), men vissa x är kvar. Alla x måste gå mot 0 samtidigt.

Detta fel dök upp i olika varianter på uppgift 1. Titta på lösningsskissen. På uppgift 1b ska man inte *först* låta *vissa* t gå mot noll (och ersätta $\frac{\ln(1-2t)}{-2t}$ med 1) och samtidigt behålla vissa t . På uppgift 1c, kan man inte *först* stryka $\ln\left(1 + \frac{2x^3}{e^{4x}}\right)$ i andra kvotens täljare (för då har x gått mot ∞) för att få kvar $\frac{\ln e^{4x} + 0}{x} = 4$, för då har x *inte* gått mot ∞ .

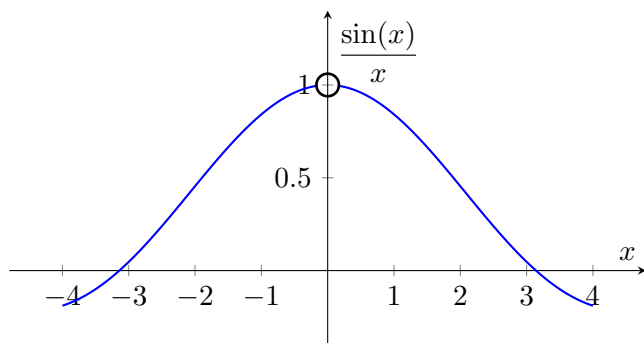
Gör ungefär som i lösningsskissen. Alla variabler mot sitt värde samtidigt.

Uppgift 2. Som sagt var, detta är inte lösningsskisser. Den vanligaste bristen var omotiverade gränsvärden när $x \rightarrow \pm\infty$, med vaga hänvisningar till hastighetstabell eller styrketabell.

Exempel: Växer $2x$ snabbare än x då $x \rightarrow \infty$? I så fall, växer $\ln(2x)$ snabbare än $\ln(x)$ då $x \rightarrow \infty$? Vi noterar att $\ln(2x) - \ln(x) = \ln(2)$ som inte går mot ∞ då $x \rightarrow \infty$. Här är tipset det vanliga, bryt ut dominerande term (som i lösningsskissen).

Lite tokigt blev det ibland med derivatan och beloppet. Definitionsmängden blir $\{x : x \neq 2\}$, inte $x > 2$ eller så. Här är beloppet vår vän: $\frac{d}{dx} \ln|x-2|$ är helt enkelt $\frac{1}{x-2}$.

Den lodräta asymptoten $x = 2$: När man ser att f inte är definierad för $x = 2$, följer INTE att $x = 2$ är en lodrät asymptot (även om det ofta "blir" så). Exempel, $\frac{\sin x}{x}$ är inte definierad för $x = 0$, men $x = 0$ är inte en lodrät asymptot.



Tillbaka till uppgift 2. Om det finns en asymptot eller ej avgörs, via definitionen, av (de eventuella) gränsvärdena då $x \rightarrow 2^+$ respektive $x \rightarrow 2^-$. Om funktionen går mot ∞ eller $-\infty$ i minst ett av fallen, då är $x = 2$ en lodrät asymptot.

Uppgift 3. a) Bestämd integral, så: Om du byter variabel, byt gränser! Inget ”+C” på bestämd integral! (Tänk efter varför.)

b) Generaliserad integral, det måste landa i ett gränsvärde. Man kan inte heller dela upp generaliserade integraler hur som helst. Om f och g är integrerbara (och a och b är tal) så gäller att $\int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$, men för generaliserade integraler får man se upp.

Exempel: $\int_1^\infty 0 dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b 0 dx = \lim_{b \rightarrow \infty} 0 = 0$. Sålunda: $0 = \int_1^\infty 0 dx = \int_1^\infty \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right) dx$, och vi ser att med en *ändlig* övre gräns $b > 1$ kan vi skriva (vi vet att det är noll, men själva principen) $\int_1^b \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right) dx = \int_1^b \frac{1}{x} dx - \int_1^b \frac{1}{x} dx = \ln(b) - \ln(b) = 0$. Däremot får vi INTE skriva att $\int_1^\infty \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right) dx$ skulle vara lika med $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx - \int_1^\infty \frac{1}{x} dx$, ty båda dessa integraler är divergenta.

Alltså: inför en ändlig övre gräns, räkna på, ta gränsvärde på slutet.

Uppgift 4. Obestämd integral: glöm ej ”+C”. Bestämd integral: inget ”+C”. Förvisso en tjatig uppmaning, men *kontrollera*. Många poäng hade räddats på det sättet.

Uppgift 5,6,7. Här var misstagen av mer spridd natur.