

Repetition, Envariabelanalys del 2

2022

Lars Alexandersson Ulf Janfalk Tomas Sjödin Johan Thim

Här har vi samlat vissa grundläggande delar av kursen. Notera att detta INTE är en fullständig genomgång av allt material i kursen, utan ett rimligt urval för att täcka godkänt-nivån.

På sidan <https://courses.mai.liu.se/GU/TATA42/kursmaterial.html> finns länkar till fyra sidor, en för varje examinator, där det finns föreläsningsvideor tillgängliga.

Innehåll

1	Taylor- och Maclaurinutvecklingar	3
1.1	Taylors formel	3
1.2	Elementära Maclaurinutvecklingar	4
1.3	Ordokalkyl och entydighetssatsen	4
1.4	Lagranges restterm	6
1.5	Gamla tentauppgifter	7
2	Differentialekvationer	8
2.1	Första ordningens linjära differentialekvationer	8
2.2	Första ordningens separabla differentialekvationer	9
2.3	Integralekvationer	9
2.4	Högre ordningens linjära differentialekvationer med konstanta koefficienter	9
2.5	Homogena lösningar	10
2.6	Substitutionen $y = ze^{kx}$	11
2.7	Partikuläransatser	11
2.8	Gamla tentauppgifter	12

3	Generaliserade integraler, numeriska serier och potensserier	13
3.1	Generaliserade integraler	13
3.2	Jämförelseprinciper	13
3.3	Absolutkonvergens	15
3.4	Numeriska serier	15
3.5	Divergenstestet och Jämförelseprinciper	15
3.6	Absolutkonvergens	17
3.7	Alternerande serier och Leibniz kriterium	17
3.8	Potensserier	17
3.9	Potensserielösningar till vissa differentialekvationer	18
3.10	Maclaurinserier	18
3.11	Gamla tentauppgifter	19
4	Tillämpningar av integralkalkyl	20
4.1	Kurvlängd	20
4.2	Rotationsvolym	21
4.3	Rotationsarea	24
4.4	Polära koordinater	25
4.5	Gamla tentauppgifter	26
5	Svar/Tips till övningar	27
6	Lösningar till tentauppgifter	30

1 Taylor- och Maclaurinutvecklingar

1.1 Taylors formel

Givet en funktion $f(x)$ och en punkt a vill man lokalt approximera $f(x)$ med ett polynom $p_n(x)$ av grad (högst) n . Formeln för $p_n(x)$ är som följer:

$$p_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Det som utmärker p_n unikt är att $f(a) = p_n(a)$, $f'(a) = p'_n(a)$, $\dots$, $f^{(n)}(a) = p_n^{(n)}(a)$.

Polynomet $p_n(x)$ kallas **Taylorpolynomet** av ordning n till $f(x)$ i a . Försök **inte** att "förenkla" polynomet genom att multiplicera ut alla parenteser; poängen är att vi vill se vilka delar som är små när x är nära a . Funktionen

$$r_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

kallas **resttermen** i utvecklingen och är alltså skillnaden mellan det exakta värdet $f(x)$ och approximationen $p_n(x)$, och den kan skrivas på två sätt:

$$r_n(x) = \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{\text{Lagranges form}} = \underbrace{\mathcal{O}((x-a)^{n+1})}_{\text{Ordoform}}$$

för något $\xi = \xi(x)$ mellan a och x .

- Ordoformen använder vi vid t.ex. beräkningar av vissa typer av gränsvärden samt vid lokala max/min-problem.
- Lagranges form används vid approximation av tal (som t.ex. π) med **rationella tal**.

Om $a = 0$ kallas $p_n(x)$ för **Maclaurinpolynomet** av ordning n till $f(x)$. Maclaurinutvecklingen av ordning n med ordrestterm ges av

$$f(x) = \underbrace{f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}_{\text{Maclaurinpolynomet } p_n(x)} + \underbrace{\mathcal{O}(x^{n+1})}_{\text{resttermen}}.$$

Vi återkommer till Lagranges form på resttermen senare.

1.2 Elementära Maclaurinutvecklingar

Följande utvecklingar ska man kunna (och kunna härleda):

$$\begin{aligned}e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \mathcal{O}(x^8), \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \mathcal{O}(x^8), \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \mathcal{O}(x^9), \\ \arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \mathcal{O}(x^9), \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} + \mathcal{O}(x^8), \\ (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \dots + \binom{\alpha}{7}x^7 + \mathcal{O}(x^8),\end{aligned}$$

där α är en konstant och

$$\binom{\alpha}{2} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2}, \quad \binom{\alpha}{3} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \quad \dots$$

1.3 Ordokalkyl och entydighetssatsen

Antag att $f(x)$ och $g(x)$ är funktioner definierade i en omgivning till punkten a . Om det i någon omgivning till a finns en begränsad funktion $b(x)$ sådan att

$$f(x) = b(x)g(x)$$

gäller i denna omgivning, då säger vi att

$$f(x) = \mathcal{O}(g(x)) \text{ då } x \rightarrow a.$$

Det vill säga i varje steg i en uträkning betecknar $\mathcal{O}(g(x))$ en funktion på formen $b(x)g(x)$ där $b(x)$ är en begränsad funktion i någon omgivning till a . Poängen är att det i många problem inte spelar någon roll exakt vilken funktion $b(x)$ är, utan bara att om t.ex. $g(x)$ går mot noll då x går mot a så går – upp till någon begränsad faktor – $\mathcal{O}(g(x))$ lika fort mot noll.

Oftast är det $a = 0$ vi kommer vara intresserade av, och $g(x) = x^k$ för något heltal k (men det finns undantag då vi jobbar med sammansatta funktioner). Om det är klart vilken punkt a som avses brukar man bara skriva $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ och låta detta vara underförstått.

Bland annat är dessa räkneregler enkla att verifiera:

- (i) $x^n = \mathcal{O}(x^m)$ om $m \leq n$,
- (ii) $\mathcal{O}(x^n) + \mathcal{O}(x^m) = \mathcal{O}(x^m)$ om $m \leq n$,
- (iii) $x^{-m}\mathcal{O}(x^n) = \mathcal{O}(x^{n-m})$ om $m \leq n$,
- (iv) Om $b(x)$ är begränsad gäller $\mathcal{O}(b(x)x^n) = b(x)\mathcal{O}(x^n) = \mathcal{O}(x^n)$,

Notera att (i) och (ii) betyder att vi i en summa inte behåller några termer eller ordotermer som har samma eller högre ordning än den "sämsta" ordotermen. T.ex. i

$$x^2 - x^6 + \mathcal{O}(x^5) + \mathcal{O}(x^4) = x^2 + \mathcal{O}(x^4)$$

behåller vi bara den "sämsta" ordotermen, som i detta fall är $\mathcal{O}(x^4)$, och allt som har högre grad, d.v.s. $-x^6$ och $\mathcal{O}(x^5)$ -termen i detta fall, läggs också in i denna.

En konsekvens av (iii) och (iv) är att t.ex. $\mathcal{O}((x^2 + 2x^3 + \mathcal{O}(x^4))^2) = \mathcal{O}(x^4)$, eftersom

$$(x^2 + 2x^3 + \mathcal{O}(x^4))^2 = (x^2(1 + 2x + \mathcal{O}(x^2)))^2 = x^4(1 + 2x + \mathcal{O}(x^2))^2.$$

OBS!

- En stor varning när det gäller ordokalkyl är att likhetstecknet blir enkelriktat. T.ex. gäller $\mathcal{O}(x^3) = \mathcal{O}(x^2)$ men $\mathcal{O}(x^2) \neq \mathcal{O}(x^3)$.
- Vi får alltså i en uträkning aldrig gå från något som är "sämre" till något som är "bättre", men tvärtom är OK.

Entydighetssats för Taylorutvecklingar: Om $q(x)$ är ett polynom av högst grad n sådant att $f(x) - q(x) = \mathcal{O}((x-a)^{n+1})$, då är $q(x)$ Taylorpolynomet av ordning n till $f(x)$ i a .

Övning 1.3.1. Beräkna följande gränsvärden:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^3 + x^4) - x^3 - x^4}{x^9},$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(x)) + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}}{x^4},$
- (c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cos(x-2) - 1}{x^2 - 4x + 4}$ (gör denna både med std.utvecklingar och direkt med Taylors formel),
- (d) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + x) \sin(1/x^2).$

Övning 1.3.2. Avgör om $f(x)$ ett lokalt lokalt extremvärde (dvs. max eller min) i $x = 0$ om:

(a) $f(x) = (2 - 2x + 2x^2)e^x$,

(b) $f(x) = (2 - 2x)e^x$,

(c) $f(x) = (2 - 2x + x^2)e^x$.

1.4 Lagranges restterm

Antag att $f(x)$ är $n + 1$ gånger kontinuerligt deriverbar på ett intervall I som innehåller punkten 0. Då gäller att

$$\underbrace{f(x)}_{\text{Exakt värde}} = \underbrace{f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}_{\text{Approximation}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}}_{\text{Approximationsfel}}$$

för något ξ mellan 0 och x .

OBS!

- ξ beror på x , så i viss mening vore det kanske naturligt att skriva $\xi(x)$ istället (det finns alltså minst ett $\xi(x)$ som uppfyller formeln ovan).
- Det måste tydligt framgå var ξ ligger för godkänd uppgift på en tenta.
- Att skriva $0 \leq \xi \leq x$ är FEL om $x < 0$; skriv därför alltid **ξ mellan 0 och x** .
- Feltermen $\left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} \right|$ behöver inte ta sitt max i en av ändpunkterna på intervallet 0 till x .

Termen

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

är alltså **Lagranges restterm**, och den kan användas till att få kontroll på resttermen en bit ifrån 0, vilket gör att det går att göra kontrollerade uppskattningar av vissa funktionsvärden (som t.ex. $\sqrt{2}$, e , $\dots$).

OBS! Om vi t.ex. vill approximera e^{-x^2} med hjälp av Maclaurinutveckling är det en bra idé att utveckla $f(t) = e^t$ med Lagranges restterm (notera att $f'(t) = e^t$, $f''(t) = e^t$, $f'''(t) = e^t$ och $f^{(4)}(t) = e^t$, så att $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 1$ och $f^{(4)}(\xi) = e^\xi$):

$$f(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \frac{e^\xi}{4!}t^4, \text{ för något } \xi \text{ mellan } 0 \text{ och } t,$$

så med $t = -x^2$ får vi

$$e^{-x^2} = f(-x^2) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \frac{e^\xi}{4!}x^8, \text{ för något } \xi \text{ sådant att } -x^2 \leq \xi \leq 0.$$

Notera alltså att vi **inte** utvecklar $g(x) = e^{-x^2}$ med hjälp av derivatorna av g , vilket skulle bli väldigt stökigt.

Övning 1.4.1. Approximera $\cos(2)$ med ett rationellt tal sådant att (beloppet av) felet är $\leq 1/10$.

1.5 Gamla tentauppgifter

Tentauppgift 1.5.1. Låt $f(x) = (x - 1)^2 \ln x$.

- (a) Bestäm Taylorutvecklingen till $f(x)$ av ordning 3 kring $x = 1$ med restterm på ordoform (restterm av grad 4). (1p)
- (b) Avgör om $f(x)$ har en lokal extrempunkt i $x = 1$ (och ange i så fall vilken typ). (1p)
- (c) Visa att $|f(x) - p(x)| \leq 10^{-4}$ om $|x - 1| \leq 10^{-1}$, där $p(x)$ är *Taylorpolynomet* av grad 3 till $f(x)$ i $x = 1$. (1p)

Tentauppgift 1.5.2. Beräkna följande gränsvärden:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 / (x - \arctan x)$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos^2 x - 1 + x^2) / x^4$
- (c) $\lim_{x \rightarrow 0} (2(1 + x)^{1/x} - 2e + ex) / x^2$

Tentauppgift 1.5.3. (a) Bestäm Maclaurinutvecklingen med restterm av ordning 8 i ordoform till

$$f(x) = \sqrt{1 + \sin(2x^2)} - \cos(x^2) - x^2 + 1.$$

- (b) Har $f(x)$ lokalt extremvärde för $x = 0$?

Tentauppgift 1.5.4. (a) Bestäm Maclaurinutvecklingen av ordning 1 till funktionen $f(x) = \arctan x$ med restterm i LAGRANGES form. (1p)

(b) Visa att $|\arctan(1/5) - 1/5| \leq 1/100$. (2p)

Tentauppgift 1.5.5. Bestäm en rationell approximation till talet

$$e^{1/5}$$

som har ett fel vars absolutbelopp är högst 10^{-5} . Approximationen får skrivas som en summa av ändligt många rationella tal.

2 Differentialekvationer

2.1 Första ordningens linjära differentialekvationer

$$(*) \quad y'(x) + f(x)y(x) = g(x).$$

Integrerande faktor (IF):

$$\text{IF} = e^{F(x)} \text{ för någon funktion } F \text{ med } F'(x) = f(x).$$

Multiplikation av (*) med IF ger, eftersom $e^{F(x)} \neq 0$,

$$(*) \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{e^{F(x)}y' + e^{F(x)}f(x)y}_{(e^{F(x)}y)'} = e^{F(x)}g(x)$$

(kontrollderivera!). Genom att integrera denna ekvation får vi

$$e^{F(x)}y = \int e^{F(x)}g(x) dx \quad (\text{alla primitiver, alltså inklusive konstant } C).$$

Om vi har ett bivillkor är det ofta bra att bestämma C redan här. Sedan är det bara att lösa ut y , och vi är klara. (Någon lösningsformel behöver alltså inte memoreras.)

OBS! Koefficienten för y' måste vara 1 för att ovanstående metod ska fungera.

OBS! Ett vanligt misstag är att glömma att multiplicera konstanten C med $e^{-F(x)}$ när man löser ut $y(x)$ i sista steget.

Övning 2.1.1. (a) $y' + 3x^2y = 2x^2$, $y(0) = 0$. (b) $xy' - y = 1 + x$, $x > 0$.

2.2 Första ordningens separabla differentialekvationer

$$g(y)y'(x) = h(x).$$

Dessa löses genom att integrera bägge sidor:

$$\int g(y)dy = \int h(x)dx.$$

Detta ger

$$G(y(x)) = H(x) + C$$

(där $G' = g$, $H' = h$). Så om vi kan invertera G så fås $y(x) = G^{-1}(H(x) + C)$.

Om vi har ett bivillkor är det även här oftast bäst att bestämma konstanten C direkt den dyker upp.

Övning 2.2.1. (a) $y' + x^2 e^y = 0$, $y(0) = 0$. (b) $y' = y^2 + 1$, $y(0) = 1$.

2.3 Integralekvationer

Integralekvationen

$$(IE) \quad y(x) + 4 \int_2^x y(t) dt = 3x - 1$$

är ekvivalent med en differentialekvation tillsammans med ett (inbakat) bivillkor:

$$\begin{cases} (DE) & y'(x) + 4y(x) = 3 \\ (BV) & y(2) = 5 \end{cases}$$

(DE) får man genom att derivera (IE), och (BV) får man genom att sätta in det x -värde i (IE) som gör att integralen där blir noll.

Sedan är det bara att lösa (DE)+(BV) på samma sätt som tidigare.

OBS! Ett vanligt misstag är att tappa bort bivillkoret.

Övning 2.3.1. $y(x) = \int_1^x y(t)^2 dt + 1/2$.

2.4 Högre ordningens linjära differentialekvationer med konstanta koefficienter

En ekvation på formen:

$$(*) \quad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = h(x)$$

kallas för en linjär differentialekvation. Vi kommer anta att a_i :na är reella konstanter, och därför säger vi att den har konstanta koefficienter. Den allmänna lösningen till en sådan är på formen:

$$y = y_h + y_p$$

där y_h betecknar den allmänna homogenlösningen, och y_p betecknar en partikulärlösning. Till y_h finns en explicit formel, och y_p kommer vi få fram genom en ansats.

OBS!

- Den allmänna lösningen till (*) ska innehålla exakt n stycken obestämda konstanter.
- Mer precist ska lösningen innehålla n stycken "linjärt oberoende" lösningar, så det SKA INTE se ut som t.ex. $Ae^x + Be^x = (A + B)e^x$.
- När vi säger att vi ska ha en partikulärlösning menar vi att denna inte ska innehålla några obestämda konstanter (dessa skulle motsvara homogenlösningar som vi redan fått med).

2.5 Homogenlösningar

Om

$$p(r) = r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \dots + a_1r + a_0 = (r - r_1)^{m_1}(r - r_2)^{m_2} \dots (r - r_k)^{m_k},$$

där $r_i \neq r_j$ om $i \neq j$, så gäller att den allmänna lösningen till den homogena ekvationen

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$$

ges av

$$y(x) = P_1(x)e^{r_1x} + P_2(x)e^{r_2x} + \dots + P_k(x)e^{r_kx},$$

där P_j :a är (eventuellt komplexa) polynom av högst grad $(m_j - 1)$.

Det är värt att titta på vad detta säger i fallet att $n = 2$. I så fall har vi antingen två enklerötter eller en dubbelrot, och satsen kan då skrivas på formen:

$$y = \begin{cases} Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x}, & \alpha \neq \beta \\ (A + Bx)e^{\alpha x}, & \alpha = \beta \end{cases}$$

Det är också värt att notera att om vi har komplexa rötter α, β då måste det gälla att α är komplexkonjugat till β (eftersom konstanterna i ekvationen är reella). Alltså är rötterna i detta fall på formen $c \pm id$ och man bör då istället skriva den allmänna homogenlösningen på formen

$$y = Ae^{(c+id)x} + Be^{(c-id)x} = e^{cx}(C \cos(dx) + D \sin(dx)).$$

2.6 Substitutionen $y = ze^{kx}$.

Givet en ekvation på formen

$$(*) \quad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = q(x)e^{kx}$$

kan man göra substitutionen $y = ze^{kx}$ där z är en funktion av x . Genom att räkna ut $y' = z'e^{kx} + kze^{kx}$, $y'' = z''e^{kx} + 2kz'e^{kx} + k^2ze^{kx}$ o.s.v. och sätta in i ekvationen då kan vi dela bort e^{kx} -termerna på båda sidorna och får en ny linjär differentialekvation för z , där högerledet blir $q(x)$. Observera att detta fungerar också om k är komplext.

OBS!

- Detta är något vi normalt gör för att hitta en partikulärlösning till (*), och då vill vi bara ha en partikulärlösning z_p till den nya ekvationen. Lösningen $y_p = z_pe^{kx}$ blir då en partikulärlösning till (*). (homogenlösningarna z_h är precis de som är sådana att z_he^{kx} är homogenlösningar y_h till (*), så z_h tar vi aldrig fram eftersom vi ju redan har y_h).
- Ett vanligt misstag är att glömma att multiplicera z_p med e^{kx} för att få y_p .

(Förskjutningsregeln är ett sätt att snabbare få fram ekvationen för z via det karakteristiska polynomet, och denna får förstås användas av den som föredrar det framför att derivera för hand.)

2.7 Partikuläransatser

Ekvation:

$$p(D)y = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = h(x).$$

- Om $h(x)$ är ett polynom: Ansätt y_p som ett polynom, av samma grad som $h(x)$ om $a_0 \neq 0$, höj gradtalet med ett om y saknas, med två om y och y' saknas, och så vidare.
- Om $h(x) = q(x)e^{kx}$: Substituera $y_p = z(x)e^{kx}$ för att bli av med e^{kx} -termen. Detta ger en ny enklare differentialekvation för z som vi förhoppningsvis kan hitta en partikulärlösning z_p till. Då blir $y_p = z_pe^{kx}$.

Specialfallet $h(x) = Ae^{kx}$ kan ofta hanteras med den enklare ansatsen $y_p = ae^{kx}$, a konstant. Det fungerar dock ej om e^{kx} är en homogenlösning.

- Om $h(x) = A \cos(kx)$ (alternativt $h(x) = A \sin(kx)$ eller $h(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx)$ [samma k]) fungerar det oftast med ansatsen $y_p = a \cos(kx) + b \sin(kx)$.

Notera dock att det kan hända att $\cos(kx)$ (och $\sin(kx)$) är en homogenlösning och då fungerar detta ej, se nästa punkt.

- Resonans: De fall som är stökigast att hantera är fallet då $h(x)$ på något sätt innehåller en homogenlösning till ekvationen. Om $h(x) = q(x)e^{kx}$ som ovan (där k eventuellt är komplext) kan vi fortfarande substituera $y_p = z(x)e^{kx}$ och räkna som tidigare och få en enklare differentialekvation i z . Detta fungerar bra även om e^{kx} råkar vara en homogenlösning. Men vi kan även råka ut för detta om vi har t.ex. $h(x) = q(x)\cos(kx)$ (alternativt $q(x)\sin(kx)$). Se kursboken för detaljer.
- Linjäritet: Om vi har ekvationen $p(D)y = h_1(x) + h_2(x) + \dots + h_k(x)$, då kan vi hitta en partikulärlösning $p(D)y_i = h_i(x)$ för varje i och sedan sätta $y_p = y_1 + y_2 + \dots + y_k$.

Övning 2.7.1. Lös $y'' - y' - 2y = h(x)$ där

- (a) $h(x) = 0$,
- (b) $h(x) = x^2$,
- (c) $h(x) = e^{3x}$,
- (d) $h(x) = e^{-x}$.

Övning 2.7.2. Lös $y'' - 2y' + 2y = h(x)$ där

- (a) $h(x) = 0$,
- (b) $h(x) = x + 3$,
- (c) $h(x) = 2\cos x + \sin x$

Övning 2.7.3. Lös $y''' - y'' = x - 20\cos 2x$.

2.8 Gamla tentauppgifter

Tentauppgift 2.8.1. Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$(2 + \cos x)y' - (\sin x)y = 4e^{2x}$$

som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) = 4$.

Tentauppgift 2.8.2. Hitta en lösning till

$$y' + yy' - \frac{1}{2}e^x = 0$$

sådan att $y(0) = -3$.

Tentauppgift 2.8.3. Bestäm alla lösningar till

$$2y'' - 3y' - 2y = 5e^{-x/2}$$

sådana att $y(0) = 0$.

Tentauppgift 2.8.4. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y^{(4)} + 2y''' + 5y'' = 10 + 8e^x.$$

3 Generaliserade integraler, numeriska serier och potensserier

3.1 Generaliserade integraler

Låt $-\infty \leq a < b \leq \infty$ och $f(x), g(x)$ vara kontinuerlig på $]a, b[$ nedan.

Definition: Om det gäller att för $c \in]a, b[$ så existerar båda gränsvärdena (och är ändliga)

$$\lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^c f(x)dx, \quad \lim_{t \rightarrow b^-} \int_c^t f(x)dx,$$

då säger vi att $f(x)$ är integrabel i generaliserad mening på $]a, b[$, och definierar

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^c f(x)dx + \lim_{t \rightarrow b^-} \int_c^t f(x)dx.$$

(Notera att detta ger rätt värde ifall $f(x)$ är integrabel i vanlig mening på $]a, b[$ samt att definitionen inte beror på vilket c vi väljer).

Integralen ovan sägs vara generaliserad i a (b) om antingen $a = -\infty$ ($b = \infty$) och/eller f är obegränsad i någon omgivning till a (b).

Om den generaliserade integralen existerar (med ändligt värde) så sägs den vara konvergent, och divergent ifall den inte gör det.

Vid konvergensundersökningar för generaliserade integraler är det lämpligt att dela upp integralen i delintegraler så att man får en generalisering per delintegral.

Övning 3.1.1. Dela upp nedanstående integral i delintegraler så att det blir en generalisering per delintegral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{|x^3 - x|}}$$

Generaliserade integraler är linjära om de är konvergenta:

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

3.2 Jämförelseprinciper

Jämförelseprincipen: Om $0 \leq f(x) \leq g(x)$ och $g(x)$ är generaliserat integrabel på $]a, b[$ då gäller att även $f(x)$ är generaliserat integrabel på $]a, b[$ med

$$0 \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Jämförelseprincipen på gränsvärdesform: Antag att $f(x), g(x) \geq 0$ och att integralerna $\int_a^b f(x)dx$ och $\int_a^b g(x)dx$ båda bara är generaliserade i b . Om

$$0 < \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} < \infty$$

då gäller att antingen är båda integralerna konvergenta eller båda divergenta. (Motsvarande gäller om integralerna endast är generaliserade i a om vi byter till $\lim_{x \rightarrow a^+}$.)

Jämförelseintegraler:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$$

är konvergent om $\alpha < 1$ men divergent annars.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$$

är konvergent om $\alpha > 1$ men divergent annars.

Notera att dessa jämförelseintegraler är lätta att undersöka (och räkna ut) med primitiv funktion.

OBS!

- Jämförelseprinciperna fungerar endast för **positiva** funktioner $f(x)$ och $g(x)$.
- När man tillämpar en av jämförelseprinciperna ska det framgå vilken integral man jämför med, om denna är konvergent eller divergent samt vad slutsatsen är.
- Ett vanligt misstag är att skriva saker som "... $1/x^2$ är konvergent ...". Detta vill vi inte se! Det ska stå något i stil med "... $\int_1^\infty 1/x^2 dx$ är konvergent..." då det är integralen och inte integranden som är konvergent.

Övning 3.2.1. Vi vet att för $\alpha > 1$ och konstant k gäller

$$\int_1^\infty \frac{1}{kx^\alpha} dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{k(1-\alpha)} \right]_1^T = \frac{1}{k(\alpha-1)}.$$

Använd detta med lämpliga k, α för att visa att

$$\frac{1}{6} \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^2 + x^4} dx \leq \frac{1}{3}.$$

(Tips: använd att $x^2 \leq x^4$ och $x^2 \geq 0$ för den undre respektive övre uppskattningen.)

Övning 3.2.2. Avgör om följande generaliserade integraler är konvergenta:

$$(a) \int_0^1 \frac{1}{x^2 + x^4} dx, \quad (b) \int_1^\infty e^{-x^2} dx, \quad (c) \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3 - x}}$$

3.3 Absolutkonvergens

Absolutintegrabla funktioner: Om $|f|$ är generaliserat integrabel på $]a, b[$, då sägs f vara generaliserat absolutintegrabel. Om f är generaliserat absolutintegrabel så är den även generaliserat integrabel, och vi har:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

3.4 Numeriska serier

Om $a_1, a_2, a_3, \dots$ är en oändlig följd av tal så kallas

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots,$$

en (oändlig) serie.

Partialsumma eller **delsumma:**

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Konvergent/divergent serie: Man säger att serien är konvergent med summa S om $s_n \rightarrow S$ då $n \rightarrow \infty$ för något reellt tal S . Om inget sådant S finns säger man att serien är divergent. (Notera alltså att serien kan vara divergent antingen genom att gränsvärdet $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ inte existerar, eller att det existerar men är $\pm\infty$.)

Linjäritet: Om serierna $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ och $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ är konvergenta så gäller

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Geometrisk serie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{1-q}$$

om $|q| < 1$, annars divergent.

Övning 3.4.1. Beräkna $\frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \dots$

3.5 Divergenstestet och Jämförelseprinciper

Divergenstestet: Om termerna $a_k \not\rightarrow 0$ då $k \rightarrow \infty$ så divergerar serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Jämförelsekriteriet: Om $0 \leq a_k \leq b_k$ så gäller att

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konvergent} &\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent och } 0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent} &\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ divergent.} \end{aligned}$$

Jämförelsekriteriet på gränsvärdesform: Om $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ och

$$0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty,$$

då gäller att antingen är båda serierna $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ och $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergenta eller båda divergenta.

Integralkriteriet: Om funktionen $f(x)$ är positiv och avtagande på $[1, \infty[$, så är serien $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ och integralen $\int_1^{\infty} f(x)dx$ antingen båda konvergenta eller båda divergenta.

Jämförelseserier:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$$

konvergerar om $\alpha > 1$ men divergerar annars.

OBS!

- Jämförelseprinciperna fungerar endast för serier med **positiva** termer.
- Divergenstestet är bara ett test för divergens. Omvändningen att om termerna går mot noll så är serien konvergent GÄLLER INTE (se t.ex. på jämförelseserierna ovan)!
- När man tillämpar en av jämförelseprinciperna ska det framgå vilken **serie** man jämför med, om denna är konvergent eller divergent samt vad slutsatsen är.
- Ett vanligt misstag är att skriva saker som "... $1/k^2$ är konvergent ...". Detta vill vi inte se! Det ska stå något i stil med "... $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ är konvergent..." då det är serien och inte termerna som är konvergent.

Övning 3.5.1. Visa att

$$\frac{49}{36} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 2.$$

(Tips: Notera att serien har positiva termer. Summera lämpligt antal termer för att få den undre uppskattningen, samt använd en integraluppskattning för att få den övre.)

Övning 3.5.2. Avgör om följande serier är konvergenta:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right), \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)^{\alpha},$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^4}, \quad (e) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \quad (f) \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2}.$$

3.6 Absolutkonvergens

Om $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ är konvergent sägs serien vara absolutkonvergent. En absolutkonvergent serie är konvergent och vidare gäller:

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

3.7 Alternierande serier och Leibniz kriterium

En serie där varannan term är positiv och varannan negativ kallas **alternierande**.

Leibniz sats: En alternierande serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ där $|a_k|$ är avtagande och går mot 0 då $k \rightarrow \infty$ är konvergent. Vidare, om serien är konvergent med summa S så gäller $|S - s_n| \leq |a_{n+1}|$, d.v.s. felet då en Leibnizkonvergent serie approximeras med en delsumma är mindre än den första utelämnade termen.

OBS! Notera att alla dessa tre saker måste vara uppfyllda:

- (1) Serien är alternierande,
- (2) Termernas belopp är avtagande, d.v.s. $|a_1| \geq |a_2| \geq |a_3| \dots$,
- (3) Termerna går mot noll, d.v.s. $a_k \rightarrow 0$ då $k \rightarrow \infty$.

(Ett vanligt missförstånd är att (3) automatiskt medför (2) vilket inte är sant.)

Övning 3.7.1. Avgör om följande serie är konvergent: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$.

3.8 Potensserier

En potensserie är en serie (funktion) på formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

där c_n är konstanter och x en variabel (så för varje fixt x vi sätter in får vi en numerisk serie).

Konvergensradie: Till varje potensserie finns ett unikt tal R ($0 \leq R \leq \infty$) sådant att serien är absolutkonvergent om $|x| < R$, och divergent om $|x| > R$ ($x = \pm R$ måste behandlas från fall till fall om man vill hitta alla $x \in \mathbb{R}$ för vilka serien är konvergent).

Rotkriteriet: Om $Q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ existerar, $0 \leq Q \leq \infty$, så är $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolutkonvergent om $Q < 1$ och divergent om $Q > 1$ (kriteriet ger ej besked ifall $Q = 1$).

Kvotkriteriet: Om $Q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ existerar, $0 \leq Q \leq \infty$, så är $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolutkonvergent om $Q < 1$ och divergent om $Q > 1$ (kriteriet ger ej besked ifall $Q = 1$).

För att beräkna konvergensradien tillämpar vi rot- eller kvotkriteriet på $a_n = c_n x^n$.

Termvis derivering/integrering av potensserier: Antag att $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ har konvergensradie $R > 0$. Då har $f(x)$ derivator av godtycklig ordning på $] -R, R[$, och vi har:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1},$$

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1},$$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

(Alla potensserier ovan har konvergensradie R .)

Övning 3.8.1. Avgör för vilka x potensserierna

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{4^n} x^n, \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{4^n} x^{2n}$$

är konvergenta. (Bestäm konvergensradien både med rot- och kvotkriteriet.)

Övning 3.8.2. (a) Beräkna $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ då $|x| < 1$.

(b) Beräkna $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{4^n}$ då $|x| < 4$.

(c) Beräkna $f(1)$ där $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{4^n} x^n$.

3.9 Potensserielösningar till vissa differentialekvationer

Genom att göra ansatsen $y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ och använda termvis derivering samt samla allt till en summa kan man reducera vissa differentialekvationer till ekvationer för koefficienterna c_k . I vissa fall kan man lösa ut varje c_n explicit samt ibland identifiera lösningen i termer av elementära funktioner.

Övning 3.9.1. Lös följande differentialekvation med hjälp av potensserieansats:
 $y'' - y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

3.10 Maclaurinserier

Följande utvecklingar ska man kunna (och kunna härleda):

Om $|x| < R$ gäller:

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \dots, \quad R = \infty, \\
\cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots, \quad R = \infty, \\
\sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots, \quad R = \infty, \\
\arctan x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad R = 1, \\
\ln(1+x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \dots, \quad R = 1, \\
(1+x)^\alpha &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \binom{\alpha}{4} x^4 + \dots, \quad R = 1 \text{ (om } \alpha \notin \mathbb{N}).
\end{aligned}$$

3.11 Gamla tentauppgifter

Tentauppgift 3.11.1. Avgör konvergens:

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} k \sin \frac{1}{k} \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \tan \frac{1}{k} \quad (c) \int_0^1 \frac{1}{1 - \cos x} dx$$

Tentauppgift 3.11.2. Är integralen

$$\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x} + x^5} dx$$

absolutkonvergent?

Tentauppgift 3.11.3. Avgör för vilka $x \in \mathbb{R}$ som

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^3} \frac{x^{2n}}{3^n}$$

är konvergent. Visa även att $f(\sqrt{3}) \geq \frac{349}{72}$. (2p)

4 Tillämpningar av integralkalkyl

4.1 Kurvlängd

Om $\bar{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\bar{r}(t) = (x(t), y(t))$ där $x(t), y(t)$ är kontinuerligt deriverbara så låter vi $\bar{r}'(t) = (x'(t), y'(t))$. Vi noterar att för små h gäller

$$|\bar{r}(t+h) - \bar{r}(t)| \approx |\bar{r}'(t)| \cdot |h|,$$

så därför definierar vi längdelement respektive längden till parameterkurvan som

$$\begin{aligned} ds(t) &= |\bar{r}'(t)| dt = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt, \\ s &= \int_a^b ds(t) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt. \end{aligned}$$

Speciellt om $\bar{r}(t) = (t, f(t))$ (dvs. funktionsgraf $y = f(x)$), då gäller

$$\begin{aligned} ds(t) &= \sqrt{1 + f'(t)^2} dt, \text{ eller uttryckt i } x, \quad ds(x) = \sqrt{1 + f'(x)^2} dx, \\ s &= \int_a^b ds(x) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx. \end{aligned}$$

(I sektion 4.4 nedan ges även en formel för kurvlängd på polär form.)

Övning 4.1.1. Beräkna längden av kurvan given av

$$\begin{cases} x = 2t^3 \\ y = t^2 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

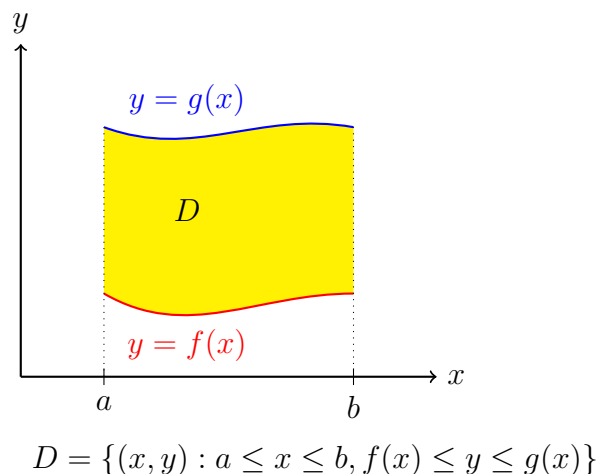
Övning 4.1.2. Beräkna längden av grafen $y = x^{3/2}$, $2 \leq x \leq 3$.

4.2 Rotationsvolym

Rotationskroppar uppkommer då vi roterar ett område D , typiskt givet på formen

$$(*) \quad D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\},$$

runt en given axel, där D antas ligga helt på en sida om denna axel.

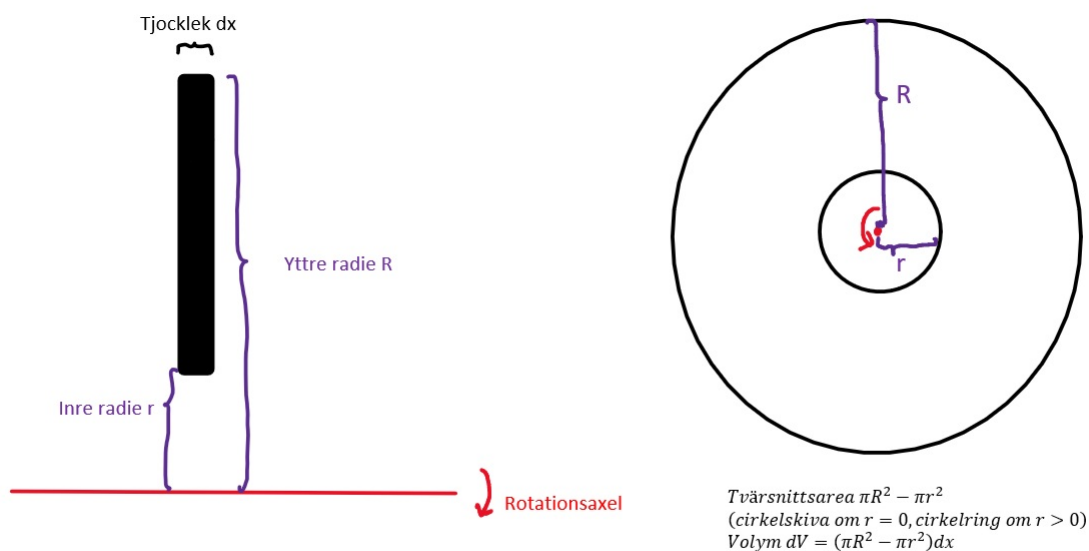


I den här kursen fokuserar vi på axlar som antingen är parallella med x -axeln (dvs. på formen $y = c$) eller parallella med y -axeln (dvs. på formen $x = c$). Metoden är att ta fram formler, med stöd av en motiverande figur där alla relevanta storheter framgår, för ett volymselement $dV = dV(x)$, och sedan blir volymen då

$$\int_a^b dV(x),$$

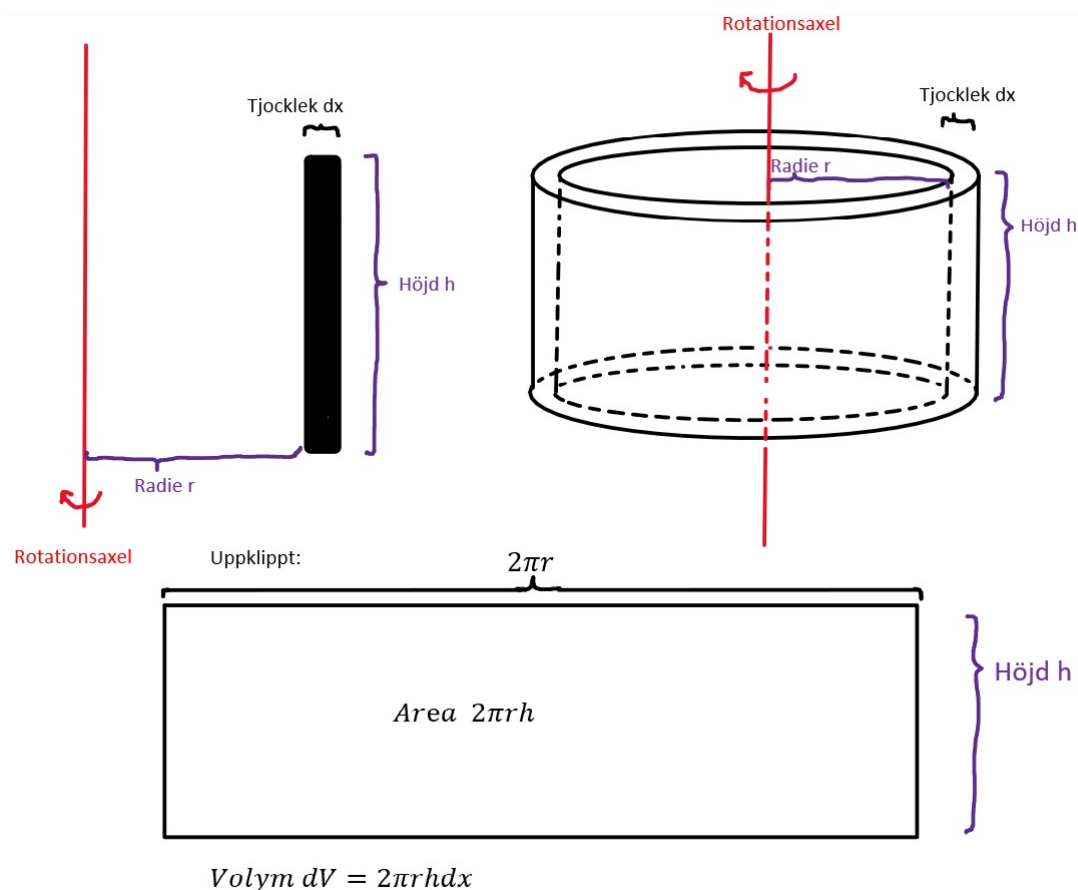
där $[a, b]$ är gränserna för x .

Rotation kring $y = c$, skivformeln: Denna bygger på följande sätt att ta fram dV . När det lilla area-elementet med tjocklek dx och kortaste respektive längsta avstånd r och R till rotationsaxeln enligt nedanstående figur roteras uppstår en cylinder med tjocklek dx och tvärsnitt som är en cirkelring enligt figuren.



Givet att D är på formen (*) ovan, om $c \leq f(x)$ (dvs. rotationsaxeln ligger under D) då blir $r = f(x) - c$ och $R = g(x) - c$. Om vi istället har $g(x) \leq c$ (dvs. rotationsaxeln ligger över D) blir det $r = c - g(x)$ och $R = c - f(x)$.

Rotation kring $x = c$, cylinderformeln (rörformeln): Denna bygger på följande sätt att ta fram dV . När det lilla area-elementet med höjd h och tjocklek dx roteras uppstår en cylinder, som när den klipps upp (approximativt då dx är litet) leder till ett rätblock med tjocklek dx och tvärsnittsarea enligt nedanstående figur:



Här kommer höjden h , givet att D är på formen (*) ovan, ges av $h = g(x) - f(x)$, medan radien blir $x - c$ om $c \leq a$ (dvs. om D ligger till höger om rotationsaxeln) eller $c - x$ om $c \geq b$ (dvs. om D ligger till vänster om rotationsaxeln).

OBS!

- Försök inte memorera dessa formler utantill, utan lär er hur de tas fram.
- För att få full poäng på en sådan uppgift krävs en principskiss som motiverar formeln som används.
- Notera att inga längder såsom radier och höjder ovan någonsin ska vara negativa.

Övning 4.2.1. Beräkna volymen av den kropp som uppstår då området $x^3 - 1 \leq y \leq 1 - x^3$, $0 \leq x \leq 1$ roteras ett varv runt linjen $y = 3$.

Övning 4.2.2. Beräkna volymen av den kropp som uppstår då området $0 \leq y \leq e^{2x}$, $0 \leq x \leq 2$ roteras ett varv runt linjen $x = 4$.

4.3 Rotationsarea

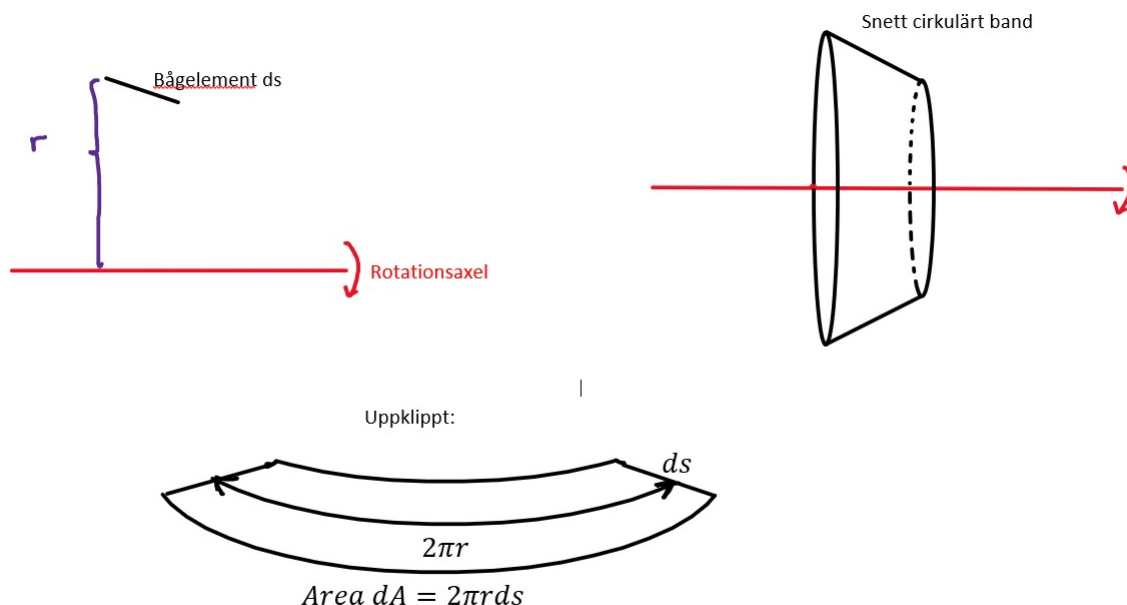
En rotationsarea uppstår då en kurva roterar kring en axel, där kurvan antas ligga på en sida om denna. I denna kurs fokuserar vi på grafer, dvs. kurvor på formen $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$.

Precis som för rotationsvolymen ser vi enbart på axelparallella rotationsaxlar, dvs. antingen $x = c$ eller $y = c$. I båda fallen handlar det om att ta fram en formel för ett area-element $dA = dA(x)$ som uppstår då ett litet ds -element av kurvan roterar runt axeln i fråga, och totala arean ges då av

$$\int_a^b dA(x).$$

(Notera också att $ds(x) = \sqrt{1 + f'(x)^2}dx$ enligt vår formel för kurvlängd av grafer.)

Här blir skillnaden mellan rotation kring $x = c$ respektive $y = c$ bara hur vi tar fram själva radien nedan, så vi nöjer oss med att illustrera situationen med rotation kring en axel parallell med x -axeln:



Notera att om vi har axeln $y = c$ så blir radien $r = f(x) - c$ om grafen ligger ovanför $y = c$, och $r = c - f(x)$ om den ligger under.

Om vi istället hade haft en axel $x = c$ får vi $r = x - c$ om grafen ligger till höger om $x = c$ och $r = c - x$ om den ligger till vänster om $x = c$.

OBS!

- Försök inte memorera dessa formler utantill, utan lär er hur de tas fram.
- För att få full poäng på en sådan uppgift krävs en principskiss som motiverar formeln som används.
- Notera att inga längder såsom radien ovan någonsin ska vara negativa.

Övning 4.3.1. Beräkna arean av den yta som uppstår då kurvan $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $0 \leq x \leq 1$ roteras kring:

(a) $y = 4$,

(b) $x = 0$.

4.4 Polära koordinater

Polära koordinater: En punkt i planet kan skrivas på formen

$$(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

där r är längden $r = |(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$ och φ vinkeln mellan vektorn (x, y) och positiva x -axeln.

Area för områden på polär form: Området

$$D = \{(x, y) : \alpha \leq \varphi \leq \beta, 0 \leq r \leq h(\varphi)\}$$

har area

$$A(D) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} h(\varphi)^2 d\varphi.$$

Längd hos parameterkurvor på polär form: Kurvan

$$r = h(\varphi) \quad \alpha \leq \varphi \leq \beta$$

har längden

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{h(\varphi)^2 + h'(\varphi)^2} d\varphi.$$

4.5 Gamla tentauppgifter

Tentauppgift 4.5.1. Beräkna längden av kurvan

$$C : \begin{cases} x = 2t^2 - 1 \\ y = t^3 + 1 \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Tentauppgift 4.5.2. Betrakta kurvan $y = x^2 + 4x$, $1 \leq x \leq 3$.

- (a) Ange integralen för att beräkna längden av kurvan.
- (b) Ange integralen för att beräkna arean av den yta om uppkommer då kurvan roteras ett varv kring linjen $x = -2$. Beräkna också arean.

För full poäng på del (b) krävs en principskiss som motiverar formeln som används.

Tentauppgift 4.5.3. Bestäm volymen av den kropp som uppstår då området givet av $0 \leq x \leq 1$ och $0 \leq y \leq e^x$ roteras ett varv kring linjen $x = -2$.

Tentauppgift 4.5.4. Antag att $f(x) \geq -2$ då $0 \leq x \leq 1$.

- (a) Ange en formel för arean av ytan som fås då kurvan $y = f(x)$, $0 \leq x \leq 1$, roteras ett varv kring linjen $y = -2$. (1p)
- (b) Ange en formel för volymen av kroppen som fås då området $-2 \leq y \leq f(x)$, $0 \leq x \leq 1$, roteras ett varv kring linjen $y = -2$. (1p)
- (c) Beräkna volymen i fallet $f(x) = x^3$. (1p)

Tentauppgift 4.5.5. Bestäm arean av området D som i polära koordinater ges av

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq r \leq \sin \varphi, \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{6} \right\}.$$

Bestäm längden av kurvan

$$\Gamma = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : r = \sin \varphi, \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{6} \right\}.$$

5 Svar/Tips till övningar

1.3.1

- (a) $-1/6$. (Använd $\sin t = t - t^3/6 + \mathcal{O}(t^5)$ med $t = x^3 + x^4$.)
(b) $-1/8$. (Använd $\cos x = 1 - x^2/2 + x^4/4! + \mathcal{O}(x^6)$.)
(c) $-1/2$. ($f(x) = f(2) + f'(2)(x-2) + f''(2)(x-2)^2/2 + \mathcal{O}((x-2)^3) = \dots = -(x-2)^2/2 + \mathcal{O}((x-2)^3)$. Alternativt byt $x = 2 + h$.)
(d) 1. (Variabelbyte till $x = 1/t$ gör att problemet överförs på $t \rightarrow 0^+$.)

1.3.2 (a) Lokalt min. (b) Lokalt max. (c) Ingetdera.

(($2 - 2x + kx^2$) $e^x = 2 + (k-1)x^2 + (k-2/3)x^3 + \mathcal{O}(x^4)$, tillämpa med $k = 2, 0$ och 1 i (a), (b) respektive (c). Alltså får vi i de tre olika fallen

- (a) $f(x) = 2 + x^2(1 + \mathcal{O}(x))$,
(b) $f(x) = 2 - x^2(1 + \mathcal{O}(x))$,
(c) $f(x) = 2 + x^3(1/3 + \mathcal{O}(x))$.

Notera att lokalt kring origo kommer uttrycken i parentes ovan inte växla tecken, x^2 växlar heller inte tecken, vilket ger resultaten i (a) och (b), medan x^3 växlar tecken i origo, vilket ger resultatet i (c).

1.4.1 $-1/3$ (t.ex.). ($\cos x = 1 - x^2/2 + x^4/4! - \cos(\xi)x^6/6!$ där ξ ligger mellan 0 och x . Sätt $x = 2$.)

2.1.1 (a) $y = 2/3 - 2e^{-x^3}/3$. (IF e^{x^3} . Ger allmän lösning $y = 2/3 + Ce^{-x^3}$.)

(b) $y = x \ln x + Cx - 1$ (division med x , IF $1/x$).

2.2.1 (a) $y = -\ln(1 + x^3/3)$, $x > -\sqrt[3]{3}$. ($-e^{-y}y' = x^2$ ger $\int -e^{-y}dy = \int x^2dx$, vilket leder till $e^{-y} = x^3/3 + C$. $y(0) = 0$ ger nu $C = 1$.)

(b) $y = \tan(x + \pi/4)$, $-3\pi/4 < x < \pi/4$. ($y'/(y^2 + 1) = 1$ ger $\arctan y = x + C$. $y(0) = 1$ ger $C = \pi/4$.)

2.3.1 $y = 1/(3 - x)$, $x < 3$. (Problemet är ekvivalent med $y' = y^2$, $y(1) = 1/2$.)

2.7.1

- (a) $y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x}$. ($r^2 - r - 2 = 0 \Leftrightarrow r = -1, r = 2$.)
(b) $y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} - x^2/2 + x/2 - 3/4$. (y_h som i (a), ansätt $y_p = ax^2 + bx + c$.)
(c) $y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} + e^{3x}/4$. (y_h som i (a), ansätt $y_p = ae^{3x}$ där a är konstant.)
(d) $y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} - xe^{-x}/3$. (y_h som i (a), ansätt $y_p = ze^{-x}$ där $z = z(x)$.)

2.7.2

- (a) $y = e^x(C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x))$. ($r^2 - 2r + 2 = 0 \Leftrightarrow r = 1 \pm i$.)
(b) $y = e^x(C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)) + x/2 + 2$. (Ansätt $y_p = ax + b$.)
(c) $y = e^x(C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)) + (4 \cos x - 3 \sin x)/5$. (Ansätt $y_p = a \cos x + b \sin x$.)

2.7.3 $y = A + Bx + Ce^x - x^3/6 - x^2/2 - \cos 2x + 2 \sin 2x$. ($r_1 = r_2 = 0$, $r_3 = 1$ ger y_h . Ansätt i tur och ordning $y_{p1} = ax^3 + bx^2$, $y_{p2} = c \cos 2x + d \sin 2x$.)

3.1.1 $\int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{\sqrt{|x^3-x|}} + \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{|x^3-x|}} + \int_{-1}^{-1/2} \frac{dx}{\sqrt{|x^3-x|}} + \int_{-1/2}^0 \frac{dx}{\sqrt{|x^3-x|}} + \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{|x^3-x|}} + \int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{|x^3-x|}} + \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{|x^3-x|}} + \int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{|x^3-x|}}$. (Eftersom $|x^3 - x| = |x(x+1)(x-1)|$ har vi att funktionen är obegränsad kring punkterna $-1, 0, 1$. Alltså är integralen generaliserad i $-\infty, -1, 0, 1, \infty$.)

3.2.1

$$\frac{1}{6} = \int_1^\infty \frac{1}{2x^4} dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^2 + x^4} dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^4} dx = \frac{1}{3}.$$

3.2.2

- (a) Divergent. (Jämför med $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$ som är divergent.)
 (b) Konvergent. (Lite svårare. Använd t.ex. att $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ då $x \geq 1$.)
 (c) Konvergent. (Observera att denna är generaliserad i både 1 och ∞ . Variabelbytet $x = 1 + t$ överför den på integralen $\int_0^\infty (t^3 + 3t^2 + 2t)^{-1/2} dt = \int_0^1 (t^3 + 3t^2 + 2t)^{-1/2} dt + \int_1^\infty (t^3 + 3t^2 + 2t)^{-1/2} dt$. Den första av dessa kan jämföras med $\int_0^1 t^{-1/2} dt$ och den andra med $\int_1^\infty t^{-3/2} dt$, som bägge är konvergenta.)

3.4.1 $3/2$. ($= \frac{3}{4} \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{2^k}$.)

3.5.1

$$\frac{49}{36} = \sum_{k=1}^3 \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k^2} \leq 1 + \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = 1 + 1 = 2.$$

3.5.2

- (a) Konvergent. (Positiv serie. Maclaurinutveckla $1 - \cos(1/n) = 1/2n^2 + \mathcal{O}(1/n^4)$.)
 (b) Divergent. (Positiv serie. Maclaurinutveckla $1 - \cos(1/\sqrt{n}) = 1/2n + \mathcal{O}(1/n^2)$.)
 (c) Konvergent om och endast om $\alpha > 1/2$. (Positiv serie. Maclaurinutveckling av termerna innanför parentesen ger $(1/2n^2 + \mathcal{O}(1/n^4))^\alpha$, så vi kan jämföra med $\sum_{n=1}^\infty 1/n^{2\alpha}$.)
 (d) Konvergent. (Vi kan t.ex. visa att $0 \leq (\ln n)/n^4 < 1/n^3$ för stora n via ett gränsvärde.)
 (e) Divergent. (Divergenstestet. Termerna går ej mot noll.)
 (f) Konvergent. (Vi kan t.ex. visa att $ne^{-n^2} \leq 1/n^2$ för stora n via ett gränsvärde. Vi kan även notera att funktionen $f(t) = te^{-t^2}$ är positiv och $f'(t) = (1 - 2t^2)e^{-t^2} < 0$ för $t > 1$. Alltså kan vi tillämpa integralkriteriet och $\int_1^\infty te^{-t^2} dt$ kan beräknas.)

3.7.1 Konvergent. (Direkt tillämpning av Leibniz kriterium.)

3.8.1

- (a) Konvergent för $|x| < 4$. (Rotkriteriet: $\sqrt[n]{\frac{n}{4^n}|x|^n} \rightarrow |x|/4 = Q$. Kvotkriteriet: $|((n+1)x^{n+1}/4^{n+1})/(nx^n/4^n)| \rightarrow |x|/4 = Q$. Ger konvergensradie 4. Ändpunkterna $x = \pm 4$ ger divergens via divergenstestet.)
 (b) Konvergent för $|x| < 2$. (Rotkriteriet: $\sqrt[n]{\frac{n}{4^n}|x|^{2n}} \rightarrow |x|^2/4 = Q$. Kvotkriteriet: $|((n+1)x^{2(n+1)}/4^{n+1})/(nx^{2n}/4^n)| \rightarrow |x|^2/4 = Q$. Ger konvergensradie 2. Ändpunkterna $x = \pm 2$ ger divergens via divergenstestet.)

3.8.2

- (a) Geometrisk serie med kvot x , $\sum_{n=0}^\infty x^n = 1/(1-x)$ för $|x| < 1$.
 (b) Geometrisk serie med kvot $x/4$, $\sum_{n=0}^\infty x^n/4^n = \sum_{n=0}^\infty (x/4)^n = 1/(1-x/4) = 4/(4-x)$ för $|x| < 4$.

- (c) $f(1) = 4/9$ ($f(1)$ fås genom att derivera den geometriska serien $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1/(1-x)$, $|x| < 1$, på båda sidor, sätta $x = 1/4$ och bryta ut $1/4$).

3.9.1 $y = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}/(2n+1)!$, $x \in \mathbb{R}$. (Ansatsen $y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, $|x| < R$, ger $y'' - y = \sum_{k=0}^{\infty} ((k+2)(k+1)c_{k+2} - c_k)x^k = 0$, $|x| < R$, och $c_0 = 0$, $c_1 = 1$. Visa att $R = \infty$.)

4.1.1 $2(10\sqrt{10} - 1)/27$. ($\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = 4t\sqrt{1+9t^2}$ för $t > 0$.)

4.1.2 $(31\sqrt{31} - 22\sqrt{22})/27$. ($\sqrt{1+y'(x)^2} = \sqrt{1+9x/4}$.)

4.2.1 9π . (Skivformeln ger (rita principskiss!) $\int_0^1 (\pi(4-x^3)^2 - \pi(2+x^3)^2) dx$.)

4.2.2 $\frac{5e^4-9}{2}\pi$. (Cylinderformeln ger (rita principskiss!) $\int_0^2 2\pi(4-x)e^{2x} dx$.)

4.3.1 (Rita principskisser!)

(a) $\pi(4e - \frac{4}{e} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4e^2} - 1)$. ($ds = \sqrt{1+y'(x)^2} dx = \dots = \frac{e^x+e^{-x}}{2} dx$, ger $\int_0^1 2\pi(4 - y(x)) ds = \int_0^1 2\pi(4 - \frac{e^x+e^{-x}}{2}) \frac{e^x+e^{-x}}{2} dx$.)

(b) $2\pi(1 - \frac{1}{e})$. (ds som ovan. Ger formel $\int_0^1 2\pi(x-0) ds = \int_0^1 2\pi x \frac{e^x+e^{-x}}{2} dx$.)

6 Lösningar till tentauppgifter

1.5.1

(a). Direkt lösning med Taylors formel:

$$f(x) = (x-1)^2 \ln x, \quad f(1) = 0, \quad f'(x) = 2(x-1) \ln x + (x-1)^2/x, \quad f'(1) = 0, \quad f''(x) = 2 \ln x + 4(x-1)/x - (x-1)^2/x^2, \quad f''(1) = 0, \\ f'''(x) = 6/x - 6(x-1)/x^2 + 2(x-1)^2/x^3, \quad f'''(1) = 6.$$

Taylors formel säger nu att

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \mathcal{O}((x-1)^4) = (x-1)^3 + \mathcal{O}((x-1)^4).$$

Alternativ lösning via entydighetssatsen + standardutveckling av $\ln(1+t)$:

Med $x = 1+t$ får vi

$$f(x) = f(1+t) = t^2 \ln(1+t) = t^2(t + \mathcal{O}(t^2)) = t^3 + \mathcal{O}(t^4) = (x-1)^3 + \mathcal{O}((x-1)^4).$$

Svar: $f(x) = (x-1)^3 + \mathcal{O}((x-1)^4)$.

(b). Eftersom

$$f(x) - f(1) = (x-1)^3(1 + \mathcal{O}(x-1)),$$

så ser vi att differensen $f(x) - f(1)$ växlar tecken när vi går från $x < 1$ till $x > 1$ ($(x-1)^3$ växlar tecken medan $1 + \mathcal{O}(x-1)$ inte gör det nära $x = 1$).

Svar: $x = 1$ är ingen extrempunkt.

(c). Eftersom $g(x) = \ln x$ uppfyller $g(1) = 0$, $g'(x) = 1/x$, $g'(1) = 1$ samt $g''(x) = -1/x^2$ får vi från Taylors sats med Lagranges restterm att

$$f(x) = (x-1)^2 \ln x = (x-1)^2 \left(g(1) + g'(1)(x-1) + \frac{g''(\xi)}{2}(x-1)^2 \right) = (x-1)^3 - \frac{1}{2\xi^2}(x-1)^4,$$

där ξ ligger mellan x och 1. Så om $p(x)$ betecknar Taylorpolynomet av ordning 3 till $f(x)$ i 1 har vi

$$|f(x) - p(x)| = \left| -\frac{1}{2\xi^2}(x-1)^4 \right| = \frac{1}{2\xi^2}|x-1|^4.$$

Notera nu att $|x-1| \leq 10^{-1}$ är samma sak som att $0.9 \leq x \leq 1.1$, så $\xi \geq 0.9$, vilket ger oss uppskattningen:

$$\frac{1}{2\xi^2}|x-1|^4 \leq \frac{1}{2 \cdot 0.9^2}|x-1|^4 \leq \frac{1}{2 \cdot 0.9^2}10^{-4} \leq 10^{-4},$$

om $|x-1| \leq 10^{-1}$.

1.5.2

2. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x - \arctan x} = 3$, ty:

$$\frac{x^3}{x - \arctan x} = \frac{x^3}{x - (x - \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5))} = \frac{1}{\frac{1}{3} + \mathcal{O}(x^2)} \rightarrow 3 \text{ då } x \rightarrow 0.$$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1 + x^2}{x^4} = \frac{1}{3}$, ty:

$$\begin{aligned} \frac{\cos^2 x - 1 + x^2}{x^4} &= \frac{(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \mathcal{O}(x^6))^2 - 1 + x^2}{x^4} = \\ &= \frac{1 - x^2 + \frac{x^4}{12} + \frac{x^4}{4} + \mathcal{O}(x^6) - 1 + x^2}{x^4} = \frac{1}{3} + \mathcal{O}(x^2) \rightarrow \frac{1}{3} \text{ då } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1+x)^{1/x} - 2e + ex}{x^2} = \frac{11e}{12}$, ty:

$$\begin{aligned} 2(1+x)^{1/x} &= 2e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)} = 2e^{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \mathcal{O}(x^3)} = 2e^1 e^{-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \mathcal{O}(x^3)} = \\ &= 2e \left(1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \mathcal{O}(x^3) \right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{x^2}{4} + \mathcal{O}(x^3) \right) + \mathcal{O}(\mathcal{O}(x^3)) \right) = \\ &= 2e \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{11x^2}{24} + \mathcal{O}(x^3) \right) = 2e - ex + \frac{11ex^2}{12} + \mathcal{O}(x^3). \end{aligned}$$

1.5.3

(a) Standardutvecklingarna

$$(1+t)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}t + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}t^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{6}t^3 + \mathcal{O}(t^4) = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{16} + \mathcal{O}(t^4)$$

och

$$\sin(u) = u - \frac{u^3}{6} + \mathcal{O}(u^5) \quad \text{sam} \quad \cos(v) = 1 - \frac{v^2}{2} + \mathcal{O}(v^4)$$

visar att, med $u = 2x^2$ och $t = \sin u$ samt $v = x^2$,

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 + \sin(2x^2))^{1/2} - x^2 + 1 \\ &= \left(1 + 2x^2 - \frac{(2x^2)^3}{3!} + O(x^{10})\right)^{1/2} - \left(1 - \frac{x^4}{2} + O(x^8)\right) - x^2 + 1 \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left(2x^2 - \frac{(2x^2)^3}{3!} + O(x^{10})\right) - \frac{1}{8} (2x^2 + O(x^6))^2 + \frac{1}{16} (2x^2 + O(x^6))^3 \\ &\quad - \left(1 - \frac{x^4}{2} + O(x^8)\right) - x^2 + 1 \\ &= -\frac{2x^6}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{2} + 1 + \frac{x^4}{2} + O(x^8) \\ &= 1 - \frac{x^6}{6} + O(x^8). \end{aligned}$$

(b) Eftersom

$$f(x) = 1 + x^6 \left(-\frac{1}{6} + O(x^2)\right)$$

så ser vi att för x nära 0 så gäller att $f(x) < 1 = f(0)$ om $x \neq 0$ eftersom $x^6 > 0$ så $x^6 \left(-\frac{1}{6} + O(x^2)\right) < 0$ för $x \neq 0$ (små x). Således har $f(x)$ ett lokalt maximum då $x = 0$.

Svar: (a) $1 - \frac{x^6}{6} + O(x^8)$ (b) Ett lokalt maximum.

1.5.4

(a) Derivering ger

$$f(x) = \arctan x, \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2},$$

så

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(\xi) = -\frac{2\xi}{(1+\xi^2)^2}.$$

Maclaurinutvecklingen av ordning 1 ges av $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2!}x^2$ för något $\xi = \xi(x)$ mellan 0 och x , så vi får följande

$$\text{Svar: } \arctan x = x - \frac{\xi}{(1+\xi^2)^2} x^2 \text{ för något } \xi = \xi(x) \text{ mellan 0 och } x.$$

(b) Insättning av $x = 1/5$ i utvecklingen i (a) ger

$$\underbrace{\arctan \frac{1}{5}}_{\text{Exakt värde}} = \underbrace{\frac{1}{5}}_{\text{Approx.}} - \underbrace{\frac{\xi}{(1+\xi^2)^2} \cdot \frac{1}{5^2}}_{\text{Approximationsfel}}$$

för något ξ mellan 0 och $1/5$. Således får vi

$$\left| \arctan \frac{1}{5} - \frac{1}{5} \right| = \left| -\frac{\xi}{(1+\xi^2)^2} \cdot \frac{1}{5^2} \right| = \frac{|\xi|}{(1+\xi^2)^2} \cdot \frac{1}{5^2} \leq \frac{1/5}{(1+0^2)^2} \cdot \frac{1}{25} = \frac{1}{125} \leq \frac{1}{100},$$

vilket skulle bevisas; notera att $|\xi| \leq 1/5$ och $1 + \xi^2 \geq 1 + 0^2$.

1.5.5 Låt $f(x) = e^x$. Då är $f^{(n)}(x) = e^x$ för alla positiva heltal n och enligt Taylors sats med Lagranges restterm gäller således

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{e^\xi}{5!}x^5,$$

där ξ ligger mellan 0 och x . Vi har ovan "chansat på" att ordning 4 i utvecklingen räcker, men det vet vi inte säkert förrän vi uppskattat feltermen nedan.

Vi vill approximera $e^{1/5}$, så

$$e^{1/5} = f(1/5) = \underbrace{1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{2 \cdot 5^2} + \frac{1}{6 \cdot 5^3} + \frac{1}{24 \cdot 5^4}}_{\text{approximation}} + \underbrace{\frac{e^\xi}{120 \cdot 5^5}}_{\text{fel}},$$

där ξ ligger mellan 0 och $1/5$. Eftersom $e^\xi \leq e^{1/5} < e^1 < 3$ så är

$$\left| \frac{e^\xi}{120 \cdot 5^5} \right| < \frac{3}{3 \cdot 5^3 \cdot 10^3} = \frac{1}{125000} < 10^{-5},$$

så är det absoluta felet $< 10^{-5}$.

Svar: $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{2 \cdot 5^2} + \frac{1}{6 \cdot 5^3} + \frac{1}{24 \cdot 5^4}$.

2.8.1 Eftersom $(2 + \cos x)' = -\sin x$ får vi omedelbart att

$$(2 + \cos x)y' - (\sin x)y = 4e^{2x} \quad \Leftrightarrow \quad ((2 + \cos x)y)' = 4e^{2x} \quad \Leftrightarrow \quad (2 + \cos x)y = 2e^{2x} + C.$$

Bivillkoret $y(0) = 4$ ger $(2 + 1) \cdot 4 = 2 + C$, d.v.s. $C = 10$, och därmed $y = (2e^{2x} + 10)/(2 + \cos x)$.

Svar: $y = \frac{2e^{2x} + 10}{2 + \cos x}$.

(Alternativ början: Eftersom $2 + \cos x > 0$ kan vi skriva om differentialekvationen till den ekvivalenta formen

$$(*) \quad y' + \frac{-\sin x}{2 + \cos x}y = \frac{4e^{2x}}{2 + \cos x},$$

och koefficienten för y är $g(x) = (-\sin x)/(2 + \cos x)$, med en primitiv $G(x) = \ln(2 + \cos x)$ (sätt $t = \cos x$, t.ex.), så en integrerande faktor är $e^{G(x)} = \exp(\ln(2 + \cos x)) = 2 + \cos x$. Multiplikation av $(*)$ med denna gör att vi återfår den ursprungliga differentialekvationen. Därefter som ovan.)

2.8.2

$$y' + yy' - \frac{1}{2}e^x = 0 \Leftrightarrow (1 + y)y' = \frac{1}{2}e^x.$$

Ekvationen är alltså separabel och vi integrerar nu bägge sidor:

$$\int (1 + y)dy = \int \frac{1}{2}e^x dx$$

vilket ger

$$y + \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}(e^x + C) \Leftrightarrow y^2 + 2y = e^x + C.$$

Bivillkoret ger nu $y(0)^2 + 2y(0) = 9 - 6 = 3 = e^0 + C$, d.v.s. $C = 2$. Ekvationen

$$y^2 + 2y = e^x + 2$$

har lösningarna

$$y = -1 \pm \sqrt{3 + e^x},$$

men bivillkoret ger att den sökta lösningen är

$$y = -1 - \sqrt{3 + e^x}.$$

Notera att denna löser ekvationen för alla $x \in \mathbb{R}$.

$$\textbf{Svar: } y = -1 - \sqrt{3 + e^x}, -\infty < x < \infty.$$

2.8.3 $2r^2 - 3r - 2 = 0 \Leftrightarrow r = 2$ eller $r = -1/2$, så

$$y_h = Ae^{2x} + Be^{-x/2}.$$

Med substitutionen $y_p = ze^{-x/2}$ insatt i ekvationen får vi

$$2(ze^{-x/2})'' - 3(ze^{-x/2})' - 2(ze^{-x/2}) = 2(D - 2)(D + 1/2)(ze^{-x/2}) = \text{ /förskjutningsregeln/ } = 2e^{-x/2}(D - 5/2)Dz = 2e^{-x/2}(z'' - 5z'/2) = 5e^{-x/2}.$$

Detta kan vi lösa med $z' = -1$ så $z = -x$ duger. Så en partikulärlösning är $y_p = -xe^{-x/2}$. Detta ger

$$y = y_h + y_p = Ae^{2x} + Be^{-x/2} - xe^{-x/2}.$$

Bivillkoret ger nu

$$y(0) = A + B = 0 \Leftrightarrow B = -A.$$

$$\textbf{Svar: } y = A(e^{2x} - e^{-x/2}) - xe^{-x/2}$$

2.8.4 Ekvationen är linjär och har det karakteristiska polynomet

$$p(r) = r^4 + 2r^3 + 5r^2 = r^2(r^2 + 2r + 5) = r^2(r + 1 - 2i)(r + 1 + 2i).$$

Således ges lösningarna till den homogena ekvationen $p(D)y_h = 0$ av

$$y_h = C_1 + C_2x + e^{-x}(C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x)$$

enligt känd sats. För att hitta partikulärlösningar utnyttjar vi superpositionsprincipen och hittar först en lösning till

$$p(D)y_{p_1} = 8e^x.$$

Eftersom $r = 1$ inte är en rot till $p(r)$ så försöker vi med ansatsen $y_{p_1} = Ae^x$. Direkt derivering visar att

$$p(D)(Ae^x) = Ae^x + 2Ae^x + 5Ae^x = 8Ae^x,$$

så om vi låter $A = 1$ gör det att högerledet blir $8e^x$. Givetvis kan vi ansätta $y_{p_1} = z(x)e^x$ istället och använda förskjutningssatsen (eller derivera på likt ovan) istället.

För att hitta en partikulärlösning till

$$p(D)y_{p_2} = 10$$

ansätter vi $y_{p_2} = Bx^2$ eftersom $p(D)(\text{polynom}) = \text{polynom}$, där högerledet har gradtal två steg lägre (om vi ansätter ett polynom med grad ≥ 2). Insatt i ekvationen ger detta

$$p(D)(Bx^2) = 10B,$$

så $B = 1$.

Svar: $y = C_1 + C_2x + e^{-x}(C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x) + e^x + x^2$.

3.11.1

- (a) Sätt $a_k = k \sin \frac{1}{k}$. Vi ser att $a_k = \frac{\sin(1/k)}{1/k} \rightarrow 1$ då $k \rightarrow \infty$ enligt standardgränsvärde, så $a_k \not\rightarrow 0$ då $k \rightarrow \infty$. Serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är därför divergent, enligt Divergenstestet.
- (b) Sätt $a_k = (-1)^k \tan \frac{1}{k}$. Eftersom $\tan \frac{1}{k} > 0$ då $k \geq 1$ är serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ alternerande, och eftersom dessutom $|a_k| = \tan \frac{1}{k} \searrow 0$ då $k \rightarrow \infty$ ($|a_k|$ avtar mot noll, d.v.s. $|a_1| \geq |a_2| \geq |a_3| \geq \dots$ och $|a_k| \rightarrow 0$) är serien en Leibnizserie, och därmed konvergent.
- (c) Sätt $f(x) = \frac{1}{1 - \cos x}$. Vi ser att $f(x) \geq 0$ och att $\int_0^1 f(x) dx$ är generaliserad endast i 0. Vi får

$$f(x) = \frac{1}{1 - (1 - x^2/2 + \mathcal{O}(x^4))} = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1/2 + \mathcal{O}(x^2)} = g(x) \cdot \frac{1}{1/2 + \mathcal{O}(x^2)}$$

med $g(x) = 1/x^2$, och noterar att $g(x) \geq 0$ och att $\int_0^1 g(x) dx$ är generaliserad endast i 0. Vidare,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{1/2 + \mathcal{O}(x^2)} \rightarrow 2 \quad \text{då } x \rightarrow 0^+,$$

och eftersom $0 < 2 < \infty$ säger Jämförelsekriteriet på gränsvärdesform att integralerna $\int_0^1 f(x) dx$ och $\int_0^1 g(x) dx$ antingen båda är konvergenta eller båda divergenta. Men $\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 (1/x^2) dx$ är divergent (standardintegral), och därmed är också $\int_0^1 f(x) dx$ divergent.

Svar: (a) Divergent (b) Konvergent (c) Divergent.

3.11.2 Eftersom $\left| \frac{\cos x}{\sqrt{x+x^5}} \right| \leq \frac{1}{x^5}$ följer det att

$$\int_1^\infty \left| \frac{\cos x}{\sqrt{x+x^5}} \right| dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^5} dx < \infty,$$

så integralen är absolutkonvergent.

3.11.3

Vi använder rotkriteriet:

$$\left| \frac{n+3}{n^3} \frac{x^{2n}}{3^n} \right|^{1/n} = \left| \frac{n+3}{n^3} \right|^{1/n} \frac{|x|^2}{3} \rightarrow \frac{|x|^2}{3} \quad \text{då } n \rightarrow \infty.$$

Alltså har vi konvergensradie $\sqrt{3}$. Test av ändpunkterna $x = \pm\sqrt{3}$ ger, eftersom $(n+3)/n^3 \leq 4/n^2$, och $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ är konvergent, att

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{n+3}{n^3} \frac{(\pm\sqrt{3})^{2n}}{3^n} = \sum_{n=1}^\infty \frac{n+3}{n^3}$$

är konvergent. Alltså konvergerar serien då $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$.

Notera nu slutligen, eftersom alla termer är positiva, att

$$f(\sqrt{3}) = \sum_{n=1}^\infty \frac{n+3}{n^3} \frac{(\sqrt{3})^{2n}}{3^n} = \sum_{n=1}^\infty \frac{n+3}{n^3} \geq \sum_{n=1}^3 \frac{n+3}{n^3} = \frac{1+3}{1} + \frac{2+3}{8} + \frac{3+3}{27} = \frac{349}{72}.$$

Svar: Summan konvergerar för $x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

4.5.1

Båglängdselementet är $ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \sqrt{16t^2 + 9t^4} dt$, varför kurvans längd är

$$L = \int_0^1 \sqrt{16t^2 + 9t^4} dt = \int_0^1 t \sqrt{16 + 9t^2} dt = \frac{1}{27} [(16 + 9t^2)^{3/2}]_0^1 = \frac{61}{27}$$

längdenheter.

4.5.2

Kurvans bågelementet ges (i båda deluppgifterna) av

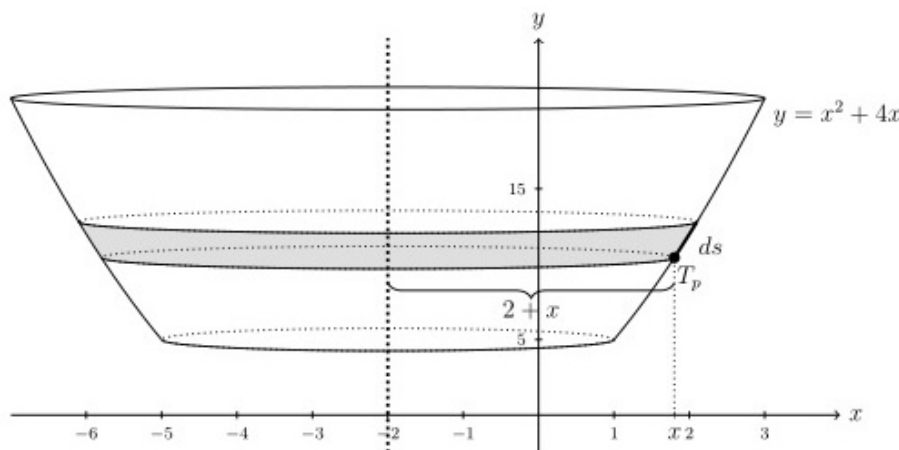
$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + (2x + 4)^2} dx = \sqrt{1 + 4(x + 2)^2} dx,$$

där $1 \leq x \leq 3$.

(a) Kurvans längd beräknas genom att integrera bågelementet

$$L = \int_1^3 ds(x) = \int_1^3 \sqrt{1 + 4(x + 2)^2} dx.$$

(b) Rotationsarean finner vi genom att använda Pappos-Guldins formler. I vårt fall att arean ges av tyngdpunktens väg multiplicerat med längden: $dA = 2\pi r \cdot ds$, där r är avståndet mellan ds och rotationsaxeln. Rotationsaxeln är $x = -2$ och tyngdpunkten T_p för ds ligger approximativt i punkten $(x, x^2 + 4x)$ (vänstra ändpunkten), så vid rotation kring $x = -2$ förflyttar sig tyngdpunkten sträckan $2\pi(x + 2)$. En figur beskriver situationen.

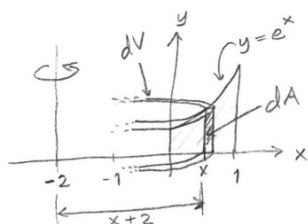


Rotationsarean som uppstår finner vi nu genom att summera areaelementen:

$$\begin{aligned} A &= \int_1^3 dA(x) = 2\pi \int_1^3 (x + 2) ds(x) = 2\pi \int_1^3 (x + 2) \sqrt{1 + 4(x + 2)^2} dx \\ &= 2\pi \left[\frac{(1 + 4(x + 2)^2)^{3/2}}{12} \right]_1^3 = \frac{\pi}{6} (101^{3/2} - 37^{3/2}). \end{aligned}$$

Svar: (a) $\int_1^3 \sqrt{1 + 4(x + 2)^2} dx$ l.e. (b) $\frac{\pi}{6} (101^{3/2} - 37^{3/2})$ a.e.

4.5.3



Området $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq e^x$ rot. kring $x = -2$.

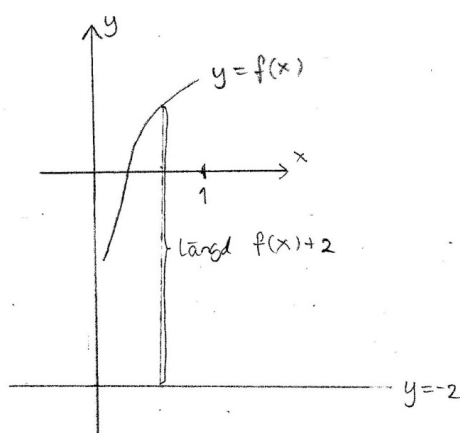
$$dV = 2\pi(x+2)dA = 2\pi(x+2)e^x dx, \text{ så}$$

$$V = \int dV = 2\pi \int_0^1 (x+2)e^x dx =$$

$$= 2\pi [(x+2)e^x - 1e^x]_0^1 = 2\pi(3e - e - 2 + 1).$$

$$\text{Svar: } 2\pi(2e - 1)$$

4.5.4



a) Arealen ges av

$$\int_0^1 2\pi(f(x)+2)ds = \int_0^1 2\pi(f(x)+2)\sqrt{1+f'(x)^2} dx.$$

b) Volymen ges av

$$\int_0^1 \pi(f(x)+2)^2 dx.$$

$$\text{c) } \int_0^1 \pi(x^3+2)^2 dx = \pi \int_0^1 (x^6 + 4x^3 + 4) dx = \pi \left[\frac{x^7}{7} + x^4 + 4x \right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{36\pi}{7}}}.$$

4.5.5 Enligt känd formel för plan area i polära koordinater erhåller vi

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} r(\varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{4} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi \\ &= \frac{1}{4} \left[\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} \right]_{\pi/6}^{5\pi/6} = \frac{1}{4} \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8}. \end{aligned}$$

Kurvlängden får vi genom att summera bågelementen ds som i polära koordinater ges av

$$ds(\varphi) = \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2} d\varphi = \sqrt{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi} d\varphi = d\varphi.$$

Sålunda ges längden av

$$L = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} ds(\varphi) = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} d\varphi = \frac{2\pi}{3}.$$

Svar: $A = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8}$ respektive $L = \frac{2\pi}{3}$.